Der Erwartungswert einer Zufallsvariable

Der *Erwartungswert* einer Zufallsvariable ist der Wert, der *im Mittel* zu erwarten ist. Auch hier soll der Begriff an Beispielen weiter geklärt werden.

Beispiel 1. Hjalmar wirft zwei Würfel und betrachtet die Zufallsvariablen

$X =$ die Summe der Würfelzahlen

$Y =$ die grössere der beiden Würfelzahlen

$Z =$ die Differenz der zwei Würfelzahlen

Welche Werte kann er *im Durchschnitt erwarten*, wenn er sehr oft zwei Würfel wirft?

Um die dabei wesentlichen Überlegungen klar zu stellen, betrachten wir die Zufallsvariable Y. Die Wahrscheinlichkeiten $p_k = P(Y = k)$ wurden zuvor bestimmt:

k	1	2	3	4	5	6
$P(Y = k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

Nehmen wir an Hjalmar wirft N mal zwei Würfel und stellen wir uns N gross vor. Er notiert geflissentlich alle seine Resultate: Er hat a_1 Mal die $(1,1)$ geworfen und daher $Y = 1$ erhalten, a_2 Mal einer der Ergebnisse $(a,b) = (1,2)$, $(2,2)$ oder $(2,1)$ (in allen diesen Fällen gilt $Y(a,b) = 2$). Man nennt die Zahlen $a_1, a_2, \ldots$ die *Häufigkeiten*:

k	1	2	3	4	5	6
Häufigkeit	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6

Sicherlich gilt $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = N$. Er hat daher *im Durchschnitt* folgenden Wert für Y erhalten:

$$\text{Durchschnittswert von } Y = \frac{a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 2 + a_3 \cdot 3 + a_4 \cdot 4 + a_5 \cdot 5 + a_6 \cdot 6}{N}$$

Dies lässt sich umschreiben zu:

$$\text{Durchschnittswert von } Y = \frac{a_1}{N} \cdot 1 + \frac{a_2}{N} \cdot 2 + \frac{a_3}{N} \cdot 3 + \frac{a_4}{N} \cdot 4 + \frac{a_5}{N} \cdot 5 + \frac{a_6}{N} \cdot 6$$

Die Zahlen $\frac{a_1}{N}, \frac{a_2}{N}, \ldots, \frac{a_6}{N}$ werden *relative Häufigkeiten* genannt. Ihre Summe ist 1 und es ist zu *erwarten*, dass bei grossem N die relativen Häufigkeiten $\frac{a_k}{N}$ sich den theoretischen Wahrscheinlichkeiten $p_k = P(Y = k)$ annähern.

Der *theoretisch* zu erwartende Durschnittswert, kurz *Erwartungswert* von Y, ist definiert als

$$\mathrm{E}(Y) = p_1 \cdot 1 + p_2 \cdot 2 + p_3 \cdot 3 + p_4 \cdot 4 + p_5 \cdot 5 + p_6 \cdot 6.$$

Der Erwatungswert von Y ist daher:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Y) &= \tfrac{1}{36} \cdot 1 + \tfrac{3}{36} \cdot 2 + \tfrac{5}{36} \cdot 3 + \tfrac{7}{36} \cdot 4 + \tfrac{9}{36} \cdot 5 + \tfrac{11}{36} \cdot 6 \\ &= \tfrac{1}{36} + \tfrac{6}{36} + \tfrac{15}{36} + \tfrac{28}{36} + \tfrac{45}{36} + \tfrac{66}{36} \\ &= \tfrac{161}{36} \\ &\approx 4.472\end{aligned}$$

Aufgaben

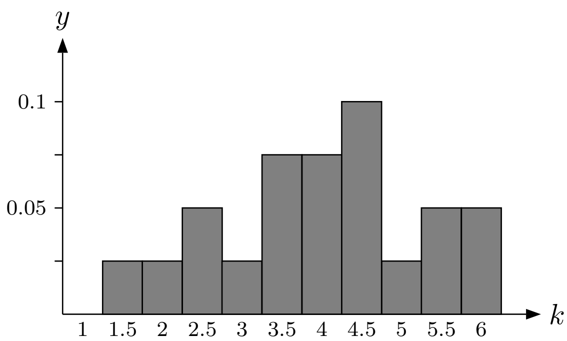
1 Bestimme den Erwartungswert der Zufallsvariable X in Besipiel 1.

2 Bestimme den Erwartungswert der Zufallsvariable Z in Besipiel 1.

3 Wieviel Geld kann man beim Spiel *chuck-a-luck* erwarten zu gewinnen, wenn der Einsatz 1 USD beträgt?

4 Bestimme den Erwartungswert der Zufallsvariable X = "Note eines zufällig gewählten Schülers der Klasse" im Beispiel der Mathematikklausur einer Klasse:

Alan	4	Beno	5.5	Cara	4	Dora	2.5
Elin	2.5	Fina	4.5	Gaby	1.5	Hans	6
Igor	4	Jade	4.5	Karl	3	Lena	5.5
Mike	3.5	Nina	5	Otto	6	Paul	2
Rita	3.5	Sara	4.5	Toni	4.5	Ulla	3.5



Begründe: Der Erwartungswert dieser Zufallsvariablen ist nichts anderes als die Durchschnittsnote.

Definition. Sei X eine Zufallsvariable auf dem Wahrscheinlichkeitsraum (S, P). Um die Notation zu vereinfachen, sei $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$.

Der *Erwartungswert* von X, der mit $\mathrm{E}(X)$ bezeichnet wird, ist definiert als

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} P(s_i) \cdot X(s_i).$$

Sind $k_1, \ldots, k_t$ die möglichen Werte von X, so kann man den Erwartungswert alternativ auch wie folgt berechnen:

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{j=1}^{t} P(X = k_j) \cdot k_j.$$

Begründung: