ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Mentorierte Arbeit in Fachdidaktik Mathematik

zur

Inversion am Kreis

von

Andreas Bärtschi

Inhalt
Die mentorierte Arbeit führt das Thema Inversion am Kreis ein. Die Inversion am Kreis wird durch das Problem des Apollonius motiviert. Wichtige Eigenschaften der Inversion werden erläutert, einige bewiesen und andere durch GeoGebra Webapplets dargestellt. Dennoch wird auch auf die Konstruktion von Hand Wert gelegt. Am Schluss wird gezeigt, wie mithilfe des neuen Instruments einige der Apolloniusprobleme angegangen werden können.

Zielpublikum
2. Klasse Kantonsschule/Kurzzeitgymnasium, 10. Schuljahr

Form
Leitprogramm mit GeoGebra Webapplets

Voraussetzungen
Geometrische Konstruktionen, Winkelsätze zu Dreieck und Kreis, ähnliche Dreiecke, Abbildungen.

Betreuung
K. Barro

Datum
April 2011

Leitidee:
Die Inversion am Kreis stellt eine nützliche und faszinierende Erweiterung der bekannten Konstruktionen dar. Sie ermöglicht es auch schwierige Probleme in der Geometrie zu lösen. Mit Hilfe des Leitprogramms können die SuS im Sinne der konstruktivistischen Lerntheorie das Wissen selbst aufbauen. Die Motivation kommt dabei aus dem Apolloniusproblem.

Dispositionsziel:
Geometrische Probleme mit Kreisen und Geraden gehen die SuS mit einem neuen Werkzeug an. Sie können mit GeoGebra Webapplets umgehen und wissen um die Vorteile dynamischer Geometriesoftware. Sie hinterfragen Behauptungen kritisch und kennen einige Methoden um sie zu beweisen.

Operationalisierte Lernziele:
Die SuS können die Inversion am Einheitskreis von Hand ausführen und auf Probleme (wie Apollonius) anwenden. Sie können eine Winkeljagd durchführen, wenden also auf unterschiedliche Arten verschiedene Winkelsätze an. Sie können die gelernten Überlegungen in eigenen Worten weitergeben.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einführung

Das Apolloniusproblem ist ein erstaunlich einfaches Problem, das vor über 2200 Jahren von Apollonios von Perge untersucht wurde.
Doch erst eine Idee aus dem 19. Jahrhundert ermöglichte eine einfache und elegante Lösung.

Das vorliegende Leitprogramm bietet einen Einstieg in das Thema *Inversion am Kreis*. Als erstes betrachten wir das Problem des Apollonius, ein altes Problem in der Geometrie, das lange Zeit nur auf komplizierte Art und Weise gelöst werden konnte. Mit der Einführung in die Inversion lernen Sie ein einfaches und nützliches Werkzeug kennen, mitdem das Problem elegant gelöst werden kann.
Bevor es jedoch soweit ist, werden in Kapitel 2 die wichtigsten Eigenschaften der Inverion behandelt, die wir dann bei der Lösung des Problems in Kapitel 3 gebrauchen werden.

Das Leitprogramm beinhaltet drei verschiedene Typen von Aufgaben. Zu jeder Aufgabe finden Sie am Schluss des Leitprogramms die zugehörige Lösung.

Konstruktions-Aufgaben: Sie festigen das Gelernte, indem Sie einfachere Konstruktionen mit Zirkel und Lineal bewältigen.

Beweis-Aufgaben: Mithilfe von Tipps beweisen Sie Aussagen, die im Verlauf des Leitprogrammes auftauchen.

GeoGebra-Aufgaben: GeoGebra ist eine dynamische Geometrie-Software. Das heisst, wir können bei einer Skizze die freien Punkte verschieben, wobei sich die Skizze dynamisch anpasst. Jede der GeoGebra-Aufgaben ist von einem Webapplet begleitet [Bär11]; Sie können also die Aufgaben mithilfe von GeoGebra lösen, ohne dass Sie das Programm installieren müssen. Alles was Sie brauchen, ist ein Webbrowser und eine aktuelle Java-Version.

1.1 Das Problem des Apollonius

Apollonios von Perge, der im 2. Jahrhundert v.Chr. lebte, behandelte in seinem leider verlorengegangenen Buch "Epaphaí" das folgende Problem:

Definition (Problem des Apollonius) Finde zu drei gegebenen Kreisen c_1, c_2, c_3 einen weiteren Kreis k, der diese drei Kreise berührt.

Dieses Problem ist gar nicht so einfach zu lösen. Als erstes sollten wir uns Gedanken dazu machen, wie eine Lösung denn aussehen kann. Gibt es vielleicht mehrere Lösungen? Erst wenn wir diese Fragen beantwortet haben, können wir uns der Konstruktion eines Lösungskreises zuwenden.

Es stellt sich heraus, dass wir im allgemeinen Fall bis zu acht mögliche Lösungen haben können! In Abbildung 1.1 (Quelle: [Mel08]) sehen wir drei Kreise, zu denen in der Tat acht Lösungskreise existieren. Dennoch gibt es auch Fälle, in denen gar kein Lösungskreis konstruiert werden kann (Abbildung 1.2).

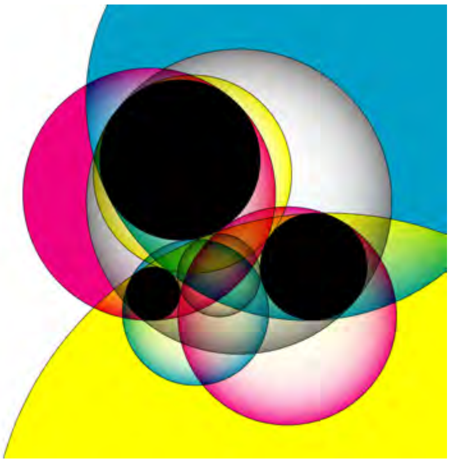


Abbildung 1.1: Acht Lösungskreise

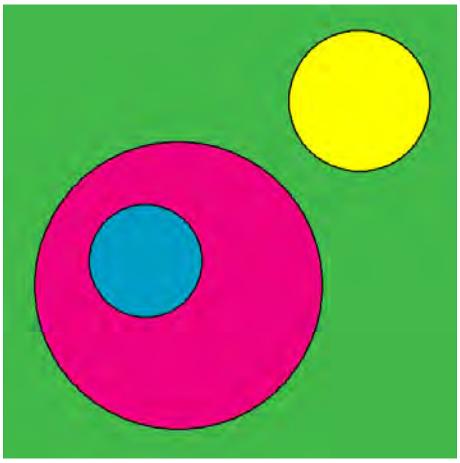


Abbildung 1.2: Keine Lösungskreise

Fälle ohne Lösung lassen wir jedoch ausser Acht und wollen uns auf die anderen Fälle konzentrieren. Gegen Ende dieses Leitprogramms werden Sie eine Konstruktion kennenlernen, die zwei der acht Lösungskreise auf einen Schlag findet:

- einen Lösungskreis, der alle drei Kreise c_1, c_2, c_3 von aussen berührt, und
- einen Lösungskreis, der alle drei Kreise c_1, c_2, c_3 in seinem Innern enthält.

1.2 Inkreis und Ankreis

Um neue Erkenntnisse zu gewinnen, versucht man in der Mathematik oft, eine Fragestellung zu verallgemeinern. Dadurch ergibt sich erst mal ein abstrakteres und damit vielleicht auch komplizierteres Verständnis des Themas. Mit dieser abstrakten Sicht können wir ein Problem dann jedoch aus einem anderen Blickwinkel betrachten, um so weitere Erkenntnisse zu gewinnen. Dies wollen wir auch im Folgenden tun. Deshalb überlegen wir uns zuerst, ob wir Probleme analog zum Apollonius-Problem bereits kennen.

Bestimmt kennen Sie die Konstruktion des Inkreises und der Ankreise an ein Dreieck. Das zugrunde liegende Problem lautet:
Finde zu drei gegebenen Geraden g_1, g_2, g_3 einen Kreis k, der diese drei Geraden berührt.
Auch dieses Problem besitzt mehrere Lösungen (nämlich vier), exemplarisch sind in Abbildung 1.3 der Inkreis und einer der Ankreise aufgeführt:

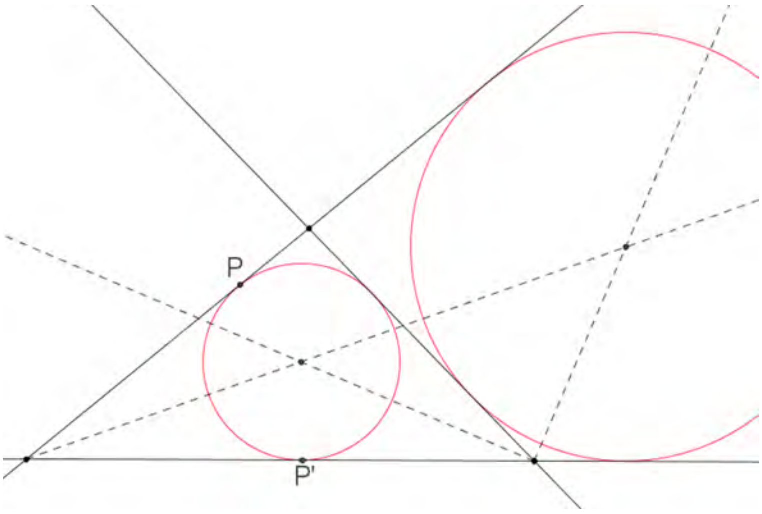
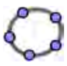


Abbildung 1.3: Inkreis und Ankreis

Wir behaupten nun Folgendes: Geraden und Kreise sind gar nicht so unterschiedliche Dinge.



Aufgabe 1.1 Überzeugen Sie sich, dass wir Punkte und Geraden als eine Art Kreise auffassen können. Dazu betrachten wir einen Kreis und "halten diesen auf der linken Seite fest". Den Abstand des Mittelpunktes, dass heisst den Radius, können wir hingegen ändern und somit anschauen, was aus dem Kreis wird, wenn wir seinen Radius gegen 0 und gegen ∞ gehen lassen.
Wir sagen also:
- eine Gerade ist ein Kreis mit Radius ......
- eine Punkt ist ein Kreis mit Radius ......

Damit können wir nun anstatt nur Kreise zu betrachten, auch Punkte und Geraden in unsere Überlegungen einbeziehen. Da diese ja ebenfalls eine Art Kreis darstellen, sprechen wir dann von *allgemeinen Kreisen*. Auch das Apollonius-Problem erweitert sich dadurch auf allgemeine Kreise. Beispielsweise ist die Konstruktion des Inkreises ein Apolloniusproblem, nämlich das Problem eines Kreises, der drei Geraden, also allgemeine Kreise berühren soll.

Bei der Konstruktion des Inkreises und der Ankreise benötigen wir die Winkelhalbierenden. Winkelhalbierende sind Geraden, also ebenfalls allgemeine Kreise. Ausserdem hat die Winkelhalbierende eine wichtige Rolle: sie spiegelt den Berührpunkt des Inkreises mit der einen Geraden auf den Berührpunkt des Inkreises mit der anderen Geraden (siehe Abbildung 1.3).

Wir möchten deshalb eine Art "Spiegelung" an allgemeinen Kreisen finden und nicht etwa "nur" an Geraden. Dies ist tatsächlich möglich!

Aufgabe 1.2 Versuchen Sie ein Gefühl dafür zu kriegen, wie die Spiegelung an allgemeinen Kreisen aussieht.

Die Spiegelung am Kreis existiert also tatsächlich. Anstatt von Spiegelung am Kreis spricht man in der Regel von *Inversion am Kreis*. Wir brauchen nun eine geeignete Definition der Inversion. Diese soll es uns ermöglichen, weitere Gedanken und Betrachtungen zur Inversion anzustellen.

1.3 Inversion am Kreis

Wir definieren die Inversion nicht für allgemeine Kreise, sondern nur für den gewöhnlichen Kreis. Dies macht auch Sinn, da wir ja bereits wissen, wie eine Spiegelung an einer Geraden definiert ist.

Definition (Inversion eines Punktes) Der zum Punkt P bezüglich eines Kreises $k(O, r)$ *inverse Punkt* P' ist definiert als derjenige Punkt auf der Geraden OP,

- der auf derselben Seite von O liegt wie P und
- der Bedingung $|OP| \cdot |OP'| = r^2$ genügt.

$k(O, r)$ wird *Inversionskreis* genannt, die Konstruktionsmethode *Inversion*.

Wenn wir die Definition genau anschauen, fallen uns sofort einige Eigenschaften der Inversion auf.

Aufgabe 1.3 Formulieren Sie die mathematischen Aussagen über inverse Punkte auf der linken Seite der Tabelle in Worte um.[1]

Aussage	Formulierung in Worten
$\lvert OP\rvert \cdot \lvert OP'\rvert = r^2$ $\Rightarrow \lvert OP'\rvert \cdot \lvert OP\rvert = r^2$	Ist P' der inverse Punkt zu P, so ist auch P der inverse Punkt zu P'.
$\lvert OP\rvert < r \Rightarrow \lvert OP'\rvert > r$	
$\lvert OP\rvert > r \Rightarrow \lvert OP'\rvert < r$	
$\lvert OP\rvert = r \Rightarrow \lvert OP'\rvert = r$	

Die Definition der Inversion weist fast jedem Punkt in der Ebene ein eindeutiges Inverses zu. Einzige Ausnahme ist der Mittelpunkt des Inversionskreises: O. Wir haben aber folgendes beobachtet: je näher P zum Kreismittelpunkt O liegt, desto weiter muss P' von O entfernt sein. Wollen wir konsequent sein, dann müssten wir sagen, dass ein inverser Punkt O' sehr sehr weit entfernt von O sein muss. Wir definieren deshalb

Definition (Inversion von O) Der Punkt O wird unter Inversion am Kreis $k(O,r)$ auf einen unendlich fernen Punkt, genannt ∞ abgebildet. Wir erweitern also die uns bekannte Ebene um einen Punkt ∞.

Bemerkungen:

- Der Punkt ∞ wird unter Inversion am Kreis $k(O,r)$ auf O abgebildet.
- Wir legen fest: jede Gerade g verläuft auch durch den Punkt ∞.
- Festlegungen wie die Inversion von O oder dass alle Geraden durch ∞ verlaufen sollen, nennt man in der Mathematik *Konventionen*.

1.4 Konstruktion des inversen Punktes

Ein zu P inverser Punkt P' kann relativ einfach mit Zirkel und Lineal konstruiert werden. Dabei haben wir zwei Möglichkeiten. Beide sind etwa gleichwertig, die eine eignet sich jedoch besser, falls P im Innern des Inversionskreises $k(O,r)$ liegt, die andere, falls P ausserhalb von k liegt. Dennoch können wir prinzipiell immer beide Konstruktionen verwenden, egal wo P liegt.

P im Innern von k

Sei k ein Kreis mit Radius r um O. Der Punkt P liege in seinem Innern (Abbildung 1.4).

Dann konstruieren wir P' wie folgt:
Als erstes zeichnen wir eine Gerade g durch O und P, da P' ebenfalls auf g zu liegen kommen muss. Als nächstes zeichen wir eine Senkrechte zu g durch P und erhalten als Schnittpunkt mit k den Punkt A. Nun legen wir eine Tangente t an den Kreis k durch den Punkt A. Der Schnittpunkt von t und g ist der gesuchte inverse Punkt P'.

Beweis Aufgrund der Konstruktion gilt $\sphericalangle APO = 90° = \sphericalangle OAP'$. Sei $\sphericalangle OAP = \alpha$. Dann ist $\sphericalangle PAP' = 90° - \alpha$ und somit $\sphericalangle AP'O = \sphericalangle AP'P = \alpha$.
Die Dreiecke ΔOPA und $\Delta OAP'$ sind also ähnlich und es gilt

$$\frac{|OP|}{r} = \frac{|OP|}{|OA|} = \frac{|OA|}{|OP'|} = \frac{r}{|OP'|}$$

und somit $|OP| \cdot |OP'| = r^2$.

[1]Tabelle aus [Kun03].

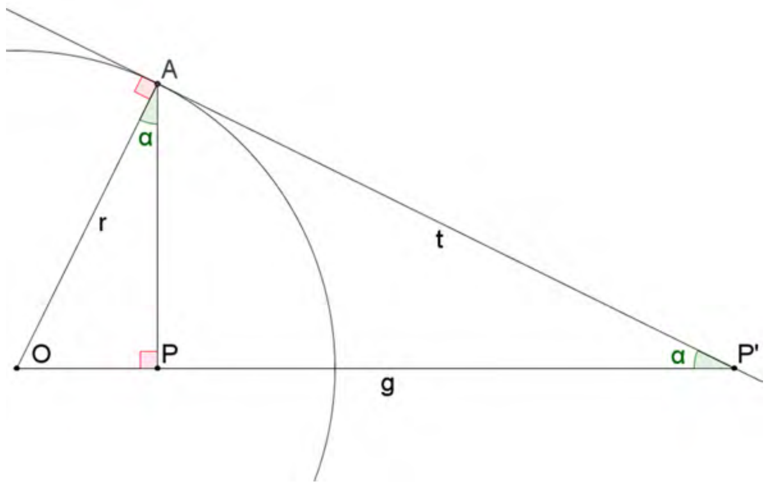


Abbildung 1.4: Konstruktion für ein P innerhalb von k

Da O, P und P' auf einer Geraden liegen, folgt sofort dass P' der zu P inverse Punkt ist. □

P ausserhalb von k

Aufgabe 1.4 Versuchen Sie, die kennengelernte Konstruktion für einen Punkt P ausserhalb des Kreises k durchzuführen.

Sie kennen also nach Aufgabe 1.4 bereits alle Konstruktionen, die Sie brauchen, um eine Inversion durchzuführen. Dennoch wollen wir - wie vorher bereits angedeutet - noch eine einfachere Konstruktion für den Fall P *ausserhalb von* k kennenlernen.

Die Konstruktion im Fall P ausserhalb von k war vor allem deshalb komplizierter als im Fall P innerhalb von k, weil wir zuerst den Thaleskreis über OP und dazu dessen Mittelpunkt M konstruieren müssen. Dies wollen wir vereinfachen, indem wir nur noch Kreise verwenden, die als Mittelpunkt bereits bekannte oder konstruierte Punkte haben.

Aufgabe 1.5 Konstruieren Sie zu P ausserhalb von k einen inversen Punkt P', indem Sie zuerst einen Punkt B auf k und danach einen Punkt P' auf OP konstruieren, sodass gilt:

$$\frac{|OP|}{r} = \frac{|OP|}{|OB|} = \frac{|OB|}{|OP'|} = \frac{r}{|OP'|}$$

Wir wollen dabei wiederum ähnliche Dreiecke verwenden. Beweisen Sie, weshalb der konstruierte Punkt P' auch wirklich der gesuchte inverse Punkt ist.

Tipp: Wenn Sie einen Kreis um P mit Radius OP konstruieren, so ist für jeden Punkt B_1 auf diesem Kreis das Dreieck ΔOPB_1 ein gleichschenkliges Dreieck mit Spitze P.

Im nächsten Kapitel werden wir gleich wichtige und verblüffende Eigenschaften der Inversion kennenlernen.

Kapitel 2

Eigenschaften der Inversion

Wir werden nun einige Eigenschaften der Inversion kennenlernen. Dabei werden wir insbesondere untersuchen, wie sich geometrische Objekte wie Geraden, Kreise und Winkel verhalten, wenn wir ihre Punkte invertieren. Dies wird uns helfen, dass Apolloniusproblem mithilfe der Inversion zu vereinfachen und danach zu lösen.

Genau gleich wie die Spiegelung an einer Geraden ist auch die Inversion am Kreis eine Abbildung. Das heisst, die Inversion ordnet jedem Punkt genau einen anderen Punkt zu, nämlich sein Inverses. Einen zugeordneten Punkt nennt man auch *Bildpunkt*. Wie bei der Spiegelung können wir nicht nur einzelne Punkte invertieren, sondern gleich eine ganze Figur (eine Figur ist ja eine Menge von Punkten). Die Menge aller Bildpunkte nennen wir dann das *Bild*.
Dementsprechend können wir der *ursprünglichen* Figur auch einen Namen geben: *Urbild*. In diesem Kapitel geht es darum, zu analysieren, was mit verschiedenen Urbildern passiert, wenn wir sie invertieren. Wir werden beispielsweise Kreise oder Dreiecke betrachten. Die Figuren, die wir anschauen werden, haben eines gemeinsam: sie sind *wegzusammenhängend*.

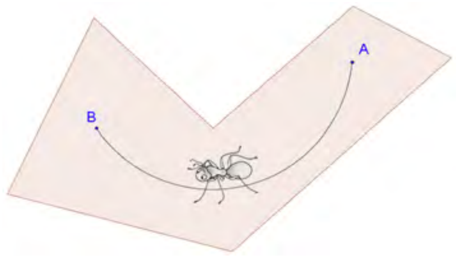


Abbildung 2.1: Ein wegzusammenhängendes Vieleck

Wir nennen ein Figur oder ein Gebiet wie in Abbildung 2.1 wegzusammenhängend, wenn für zwei beliebige Punkte A, B der Figur immer ein Weg zwischen den Punkten A und B existiert, den zum Beispiel eine Ameise[2] ablaufen könnte.
Ein Weg darf keine Lücken aufweisen. Wenn man ihn einzeichnet, so muss man dies ohne Absetzen des Stiftes tun können.

Bemerkung: Achtung! Der Begriff *Weg* ist hier nur erklärt, dies ist jedoch keine *Definition* im mathematischen Sinne des Wortes.

In Abbildung 2.2 können wir sehr gut sehen, wie denn das Bild eines wegzusammenhängenden Gebietes aussieht. Der Rand der Gebietes (Urbild in rot) wird auf den Rand eines Gebietes (Bild in grün) abgebildet wird. Genau gleich verhält es sich mit dem Innern der Figur. Wir können also sagen, dass ein wegzusammenhängendes Gebiet durch Inversion wieder auf ein wegzusammenhängendes Gebiet abgebildet wird.

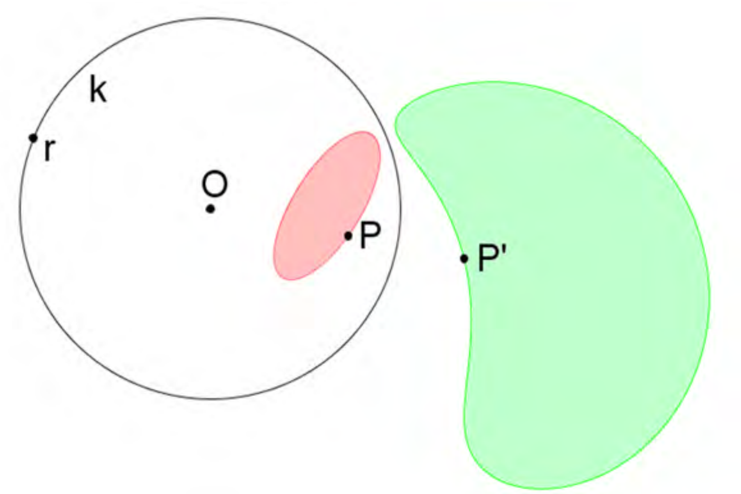


Abbildung 2.2: Ein wegzusammenhängendes Gebiet bleibt wegzusammenhängend

Obwohl Bild und Urbild nicht mehr gleich aussehen, teilen sie also doch gewisse Eigenschaften. Wir wollen im Folgenden einige geometrische Figuren untersuchen und die Eigenschaften ihrer Bilder notieren. Konkret werden wir uns mit Geraden, Kreisen, Dreiecken und schliesslich Winkel beschäftigen.

Nachdem wir die Inversion auf diese Art und Weise besser kennengelernt haben, können wir uns dann im nächsten Kapitel wieder dem Apolloniusproblem zuwenden. Was Sie in der Zwischenzeit über die Inversion lernen, wird Ihnen helfen, das Apolloniusproblem elegant zu lösen.

[2]Die im Bild auftauchende Ameise stammt von [Oli03]

2.1 Geraden

Aufgabe 2.1 Wie sieht das Bild einer Geraden unter der Inversion am Kreis um O mit Radius r aus? Verschieben Sie dazu den Punkt P auf der Geraden und analysieren Sie die Bahn des inversen Punktes P'.

	Urbild: Eine Gerade, die	Bild
a	den Inversionskreis nicht schneidet	
b	den Inversionskreis schneidet	
c	durch den Mittelpunkt O verläuft	

Tabelle 2.1: Bild einer Geraden

2.2 Kreise

Aufgabe 2.2 Wie sieht das Bild eines Kreises unter der Inversion am Kreis um O mit Radius r aus?

	Urbild: Ein Kreis der	Bild
a	durch den Mittelpunkt O verläuft	
b	nicht durch den Mittelpunkt O verläuft	
c	senkrecht zum Inversionskreis steht	

Tabelle 2.2: Bild eines Kreises

Bemerkung: Achtung! Wenn ein Kreis unter Inversion auf einen Kreis abgebildet wird, so heisst dies nicht, dass auch sein Mittelpunkt auf den Mittelpunkt des Bildkreises abgebildet wird.

2.3 Allgemeine Kreise

Wenn unsere Beobachtungen stimmen, dann werden allgemeine Kreise auf allgemeine Kreise abgebildet! Es wäre aber doch etwas voreilig, dies einfach aufgrund eines Webapplets zu behaupten. Deshalb möchten wir diese Aussage beweisen. Exemplarisch zeigen wir einfach einen der vielen Fälle:

Lemma 2.1 (Gerade → Kreis)
Eine Gerade g, die nicht durch den Punkt O verläuft, wird durch Inversion am Kreis $k(O, r)$ auf einen Kreis abgebildet, der O enthält.

Bemerkung: g verläuft durch den Punkt ∞. Wir wissen also bereits, dass ein Punkt der Geraden, nämlich ∞, auf O abgebildet wird.

Beweis Als erstes zeichen wir eine Senkrechte zu g durch O. Als Schnittpunkt mit g erhalten wir einen Punkt P. Da P derjenige Punkt auf g ist, der den kleinsten Abstand zu O hat, muss P' derjenige Punkt des Bildes sein, der maximalen Abstand zu O hat.

Wenn das Bild also ein Kreis sein soll, der ausserdem durch O und P' gehen muss, dann muss es der Thaleskreis über OP' sein (weil alle anderen Punkte des Kreises näher zu O liegen als P', muss OP' der Durchmesser des Kreises sein). Um zu zeigen, dass das Bild der Geraden der Thaleskreis über OP' ist, müssen wir für jeden Punkt $Q \in g$ beweisen, dass $\sphericalangle OQ'P' = 90°$.

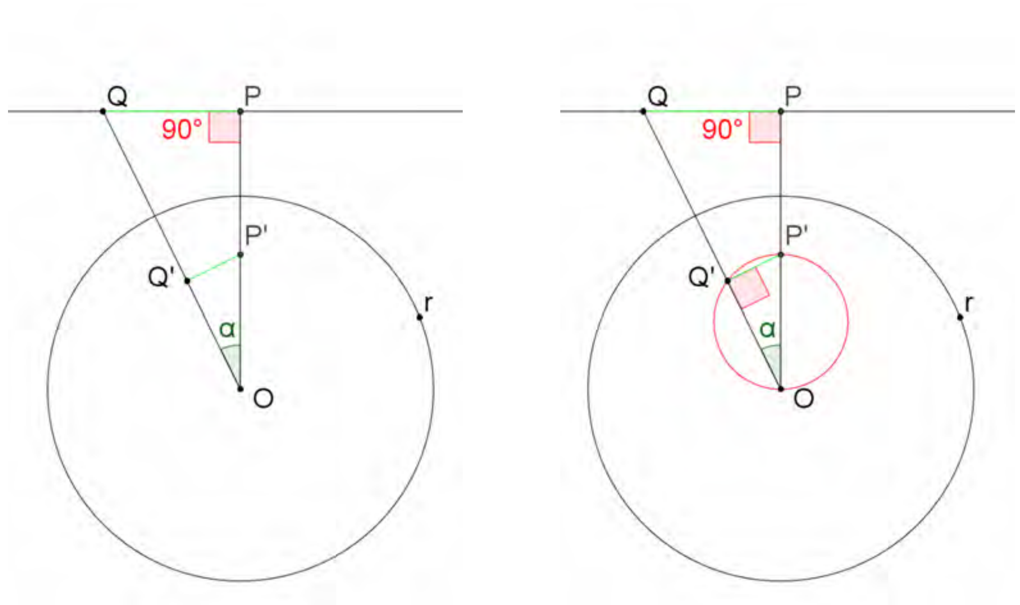


Abbildung 2.3: Eine Gerade wird auf einen Kreis abgebildet

Dies können wir erreichen, indem wir zeigen, dass die Dreiecke ΔOPQ und $\Delta OQ'P'$ *ähnlich* sind. Spiegeln wir also einmal Q an k und ziehen die Gerade durch O, Q und Q'. Dann haben die Dreiecke ΔOPQ und $\Delta OQ'P'$ bereits einen gemeinsamen Winkel α.

Ausserdem gilt:

$$|OQ| \cdot |OQ'| = r^2 = |OP| \cdot |OP'|$$
$$\text{und somit } \frac{|OQ'|}{|OP'|} = \frac{|OP|}{|OQ|}$$

Aus den gleichen Streckenverhältnissen und dem gemeinsamen Winkel α folgt, dass die Dreicke ähnlich sind und damit $\sphericalangle OQ'P' = \sphericalangle OPQ = 90°$, unabhängig vom gewählten

Punkt Q auf g. Das Bild der Inversion der Geraden g ist deshalb der Thaleskreis über OP'. $\square$

Aufgabe 2.3 Beweise als Übung die ähnliche Aussage:
Ein Kreis c, der den Mittelpunkt O enthält, wird durch Inversion am Kreis $k(O,r)$ auf eine Gerade g abgebildet, die nicht durch O verläuft.

Tipp: Versuchen Sie den vorhergehenden Beweis "umzukehren".

Aufgabe 2.4 Repetition Verbinden Sie diejenigen allgemeinen Kreise, die durch Inversion aufeinander abgebildet werden können:[3]

eine Gerade g durch O	ein zum Inversionskreis k rechtwinkliger Kreis c mit $O \notin c$
eine Gerade g mit $O \notin g$	ein Kreis d mit $O \notin c$
ein Kreis c mit $O \notin c$	eine Gerade g durch O
ein zum Inversionskreis k rechtwinkliger Kreis c mit $O \notin c$	ein Kreis c durch O

2.4 Dreiecke

Reminder: Machen Sie sich nochmals bewusst, was das Bild einer Geraden ist, wenn wir Inversion anwenden. Versuchen Sie damit, die folgende Aufgabe zu lösen:

Aufgabe 2.5

a) Konstruieren Sie das Bild eines Dreieckes ΔABC unter Inversion an einem Kreis $k(O,r)$ (für $O \notin \Delta ABC$). Wie sehen die Bilder der Seiten aus? Gibt es verschiedene Möglichkeiten?

b) Was geschieht mit dem Umlaufsinn unter Inversion?

2.5 Winkel

Bei der letzten Eigenschaft der Inversion, die wir betrachten wollen, geht es um Winkel. Die Inversion kann Figuren wie Strecken, Kreise, Dreiecke, ... ganz schön verformen. Aber wie sieht es denn bei den Winkeln aus?
Bevor wir dies untersuchen können, müssen wir zuerst festlegen, was denn ein Winkel ist. Für zwei Geraden ist dies klar. Deshalb verwenden wir dies, um beliebige Winkel zu definieren:

[3] Das zur Aufgabe gehörende Applet findet sich auf [Kun11].

Definition (Winkel zwischen glatten Kurven) Eine *glatte Kurve* ist eine Kurve, die weder Lücken noch spitze Ecken oder abrupte Wendungen besitzt. Glatte Kurven haben an jedem Punkt eine eindeutig definierte Tangente. Der *Winkel zwischen zwei glatten Kurven* ist definiert als der Winkel zwischen den Tangenten der Kurven am Schnittpunkt.

Aufgabe 2.6

a) Betrachten Sie die Punkte A, B, C sowie ihre Inversen A', B' und C'. Vergleichen Sie die Winkel $\sphericalangle BAC$ und $\sphericalangle C'A'B'$. Was fällt Ihnen auf? Vergleichen Sie die Aufgabe mit Ihrer Konstruktion aus Aufgabe 2.5. Wie könnte man also invertierte Winkel messen?

b) Bleiben Winkel im Dreieck unter Inversion erhalten? Vergleichen Sie ihre Vermutung mit der GeoGebra-Lösung.

Wir wollen unsere Vermutung aus der Aufgabe 2.6 b) nun auch beweisen. Anstatt den Winkel zwischen zwei beliebigen Geraden h und j anzuschauen, beschränken wir uns darauf, den Winkel zwischen einer Geraden g durch O und einer beliebigen Geraden h zu betrachten. Dies ist einfacher, da g unter Inversion auf sich selbst abgebildet wird, also $g = g'$. Es genügt aber auch, dies zu zeigen, da wir jeden Winkel zwischen zwei beliebigen Geraden entweder als Summe oder als Differenz (Abbildung 2.4) zweier Winkel an einer Gerade g durch O schreiben können.

$$\text{Als Summe: } \sphericalangle(h, j) = \sphericalangle(h, g) + \sphericalangle(g, j)$$
$$\text{Als Differenz: } \sphericalangle(h, j) = \sphericalangle(h, g) - \sphericalangle(g, j).$$

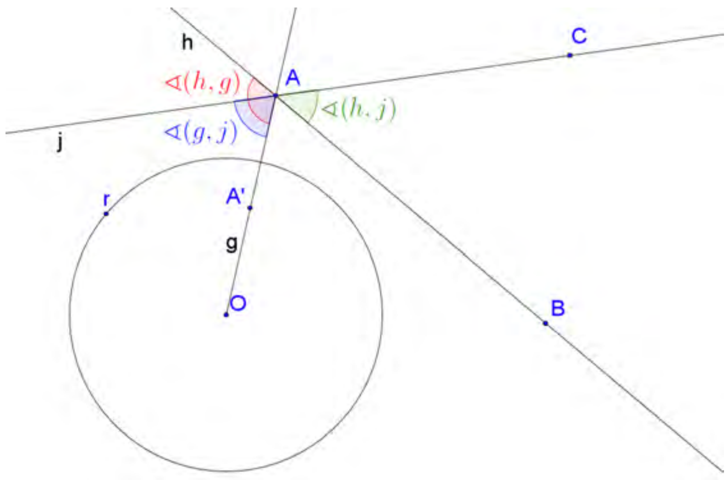


Abbildung 2.4: Ein Winkel als Differenz zweier spezieller Winkel

Aufgabe 2.7 Beweisen Sie, dass der Winkel zwischen g und h aus Abbildung 2.5 unter Inversion gleich gross bleibt, das heisst zeigen Sie

$$\alpha = \sphericalangle(g, h) = \sphericalangle(h', g)$$
$$\text{respektive } \alpha = \sphericalangle(t_{h'}, g) = \beta$$

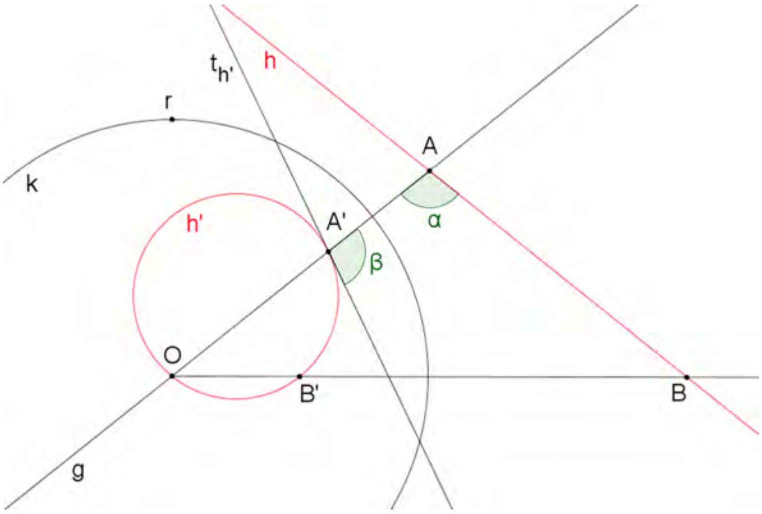


Abbildung 2.5: Zeigen Sie, dass der Winkel zwischen g und h unter Inversion gleich bleibt.

Aufgabe 2.8 Betrachten Sie im GeoGebra Applet die beiden Kurven und ihren Schnittwinkel. Überlegen Sie sich, wie Sie den dazu inversen Winkel konstruieren könnten und weshalb dieser dann gleich gross sein muss. Sie können Ihre Erkenntnisse aus Aufgabe 2.6 verwenden.

Die Inversion bildet also Winkel zwischen Kurven auf gleich grosse Winkel zwischen den Bildern der Kurven ab. Die Inversion ist deshalb eine *winkeltreue Abbildung*.

Kapitel 3

Anwendung

Die kennengelernten Eigenschaften der Inversion sind sehr hilfreich. Im Folgenden werden wir anhand aufeinander aufbauender Konstruktionen sehen, wie wir mithilfe der Inversion das Apolloniusproblem lösen können.
Zum Schluss erhalten Sie ausserdem einen Ausblick, wie Sie das Gelernte auch an anderen Beispielen anwenden und vertiefen können.

Wir kommen nun zurück auf das Apolloniusproblem. Um herauszufinden, wie wir die Inversion hilfreich einsetzen können, beginnen wir zuerst noch einmal bei Beispielen mit allgemeinen Kreisen. Den einfachsten Fall haben wir bereits behandelt: Die Konstruktion eines Kreises, der drei gegebene Geraden berührt.

Es scheint so, als sei die Lösung des Apolloniusproblems einfacher, wenn ein paar der allgemeinen Kreise die Form einer Geraden haben. Der nächsteinfachere Fall wäre also ein Kreis und zwei Geraden. Wir wollen uns zuerst diesen Fall anschauen, um dann andere schwierigere Fälle darauf zu reduzieren. Wir werden sehen, dass es dabei sogar genügt anzunehmen, dass die beiden Geraden parallel sind. Dies vereinfacht die folgende Aufgabe.

3.1 Zwei parallele Geraden und ein Kreis

Aufgabe 3.1 Konstruieren Sie einen Kreis $k_{\text{Lösung}}$, der sowohl die beiden Geraden als auch den Kreis aus Abbildung 3.1 berührt.

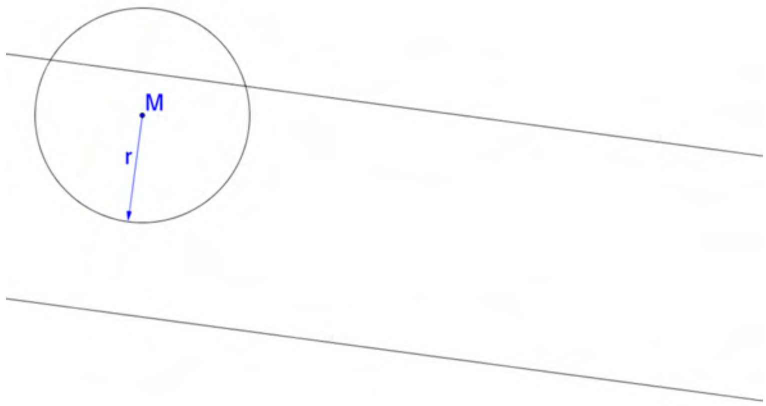


Abbildung 3.1: Konstruieren Sie den Lösungskreis

Nun können wir uns gleich an einen Fall mit drei Kreisen wagen. Die Idee dabei ist, die Inversion so geschickt zu nutzen, dass zwei der Kreise auf Geraden abgebildet werden. Danach können wir wie in Aufgabe 3.1 fortfahren, und den Lösungskreis zurückinvertieren.

3.2 Zwei Kreise, die sich berühren und ein weiterer Kreis

Gesucht sind nun drei Kreise, die sich durch Inversion in die Situation aus Aufgabe 3.1 bringen lassen. Die beiden Geraden sind also Bilder zweier Kreise c_1 und c_2 unter Inversion an einem Kreis $k(O, r)$. Darüber hinaus ist auch der Kreis aus Aufgabe 3.1 ein Bild eines dritten Kreises c_3 unter der Inversion am selben Kreis $k(O, r)$.

Aufgabe 3.2 Die Kreise c_1 und c_2 berühren sich im Punkt O wie in Abbildung 3.2. Konstruieren Sie einen Inversionskreis, der
1. c_3 auf sich selbst abbildet und
2. c_1 und c_2 auf parallele Geraden abbildet.
Konstruieren sie auch die Bilder c'_1, c'_2, c'_3 von c_1, c_2 und c_3.

Tipp: Konstruieren Sie einen Inversionskreis mit Mittelpunkt O, der **1.** erfüllt (Aufgabe 2.2!) und begründen Sie, wieso dann auch **2.** gilt.

An die invertierten Kreise c'_1, c'_2 und c'_3 können wir nun wie in Aufgabe 3.1 einen Lösungskreis $k'_{\text{Lösung}}$ konstruieren. Doch wie erhalten wir daraus einen Lösungskreis an die ursprünglichen Kreise c_1, c_2 und c_3?

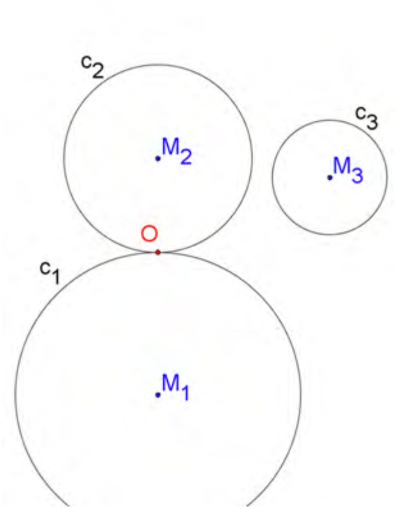


Abbildung 3.2: Konstruieren Sie eine geeignete Inversion

Aufgabe 3.3 Konstruieren Sie die Inversion von $k'_{\text{Lösung}}$ an k. Achtung: Es ist nicht sinnvoll, den Mittelpunkt M' von $k'_{\text{Lösung}}$ zu konstruieren, da das Bild von M' nicht der Mittelpunkt des zu $k'_{\text{Lösung}}$ inversen Kreises ist.

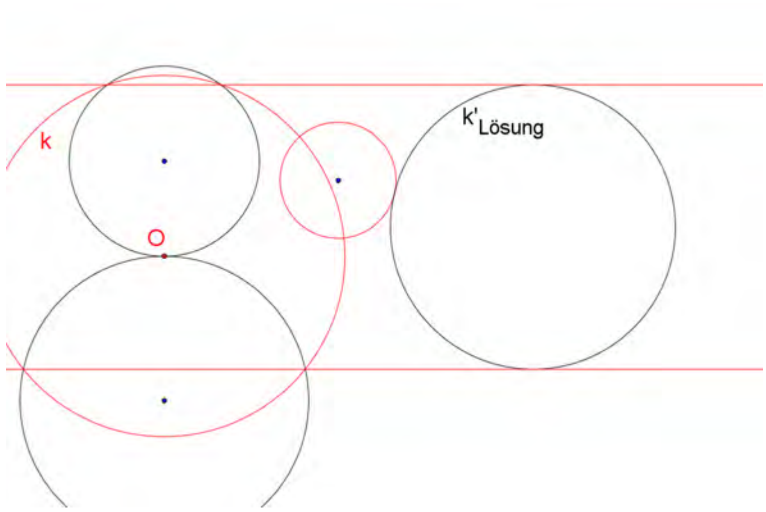


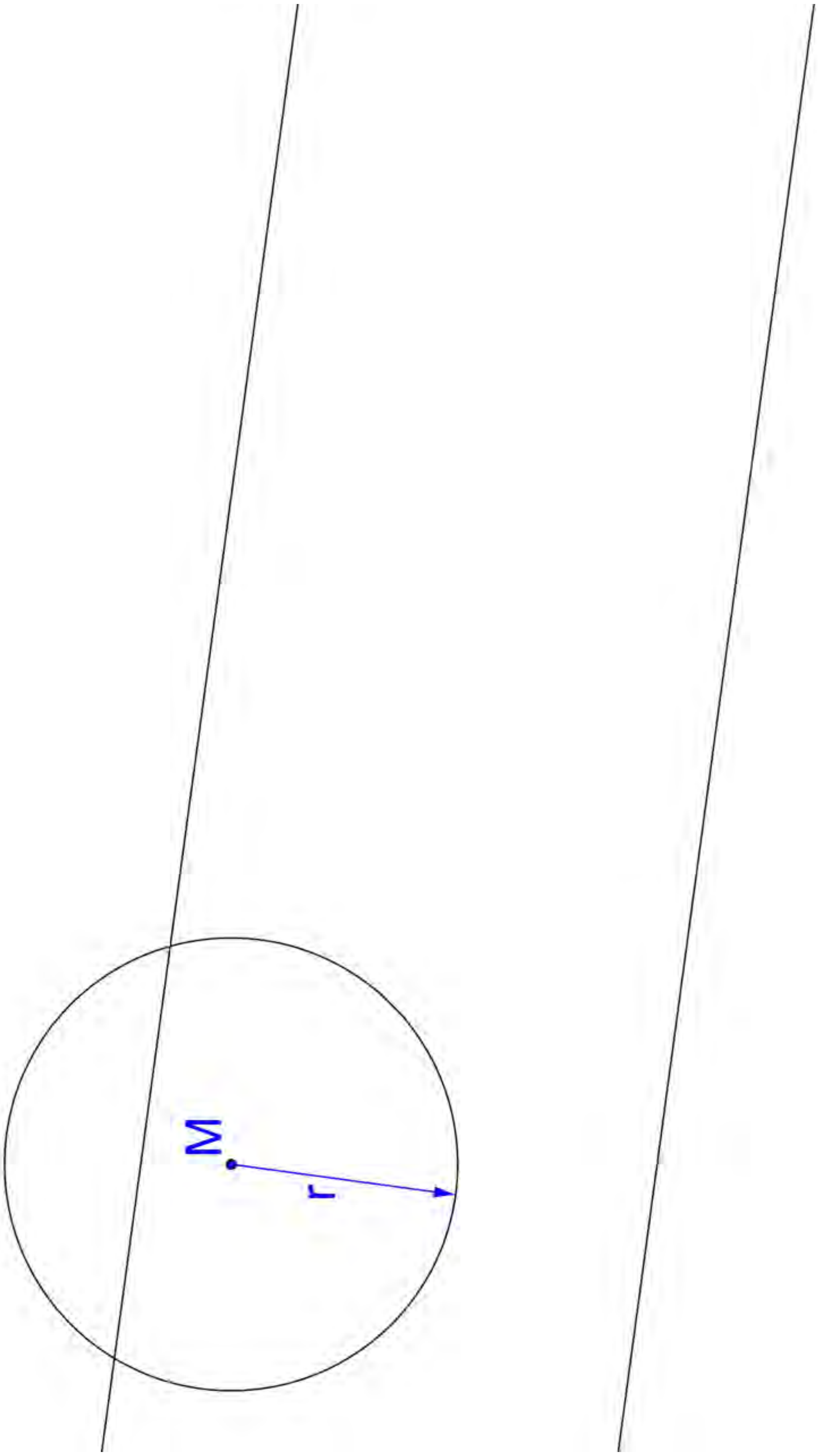
Abbildung 3.3: Spiegeln Sie $k'_{\text{Lösung}}$ an k

Aufgabe 3.4 Beweisen Sie, dass die Spiegelung eines Lösungskreises $k'_{\text{Lösung}}$ am Inversionskreis $k(O, r)$ einen Lösungskreis $k_{\text{Lösung}}$ an die ursprünglichen Kreise c_1, c_2 und c_3 ergibt.

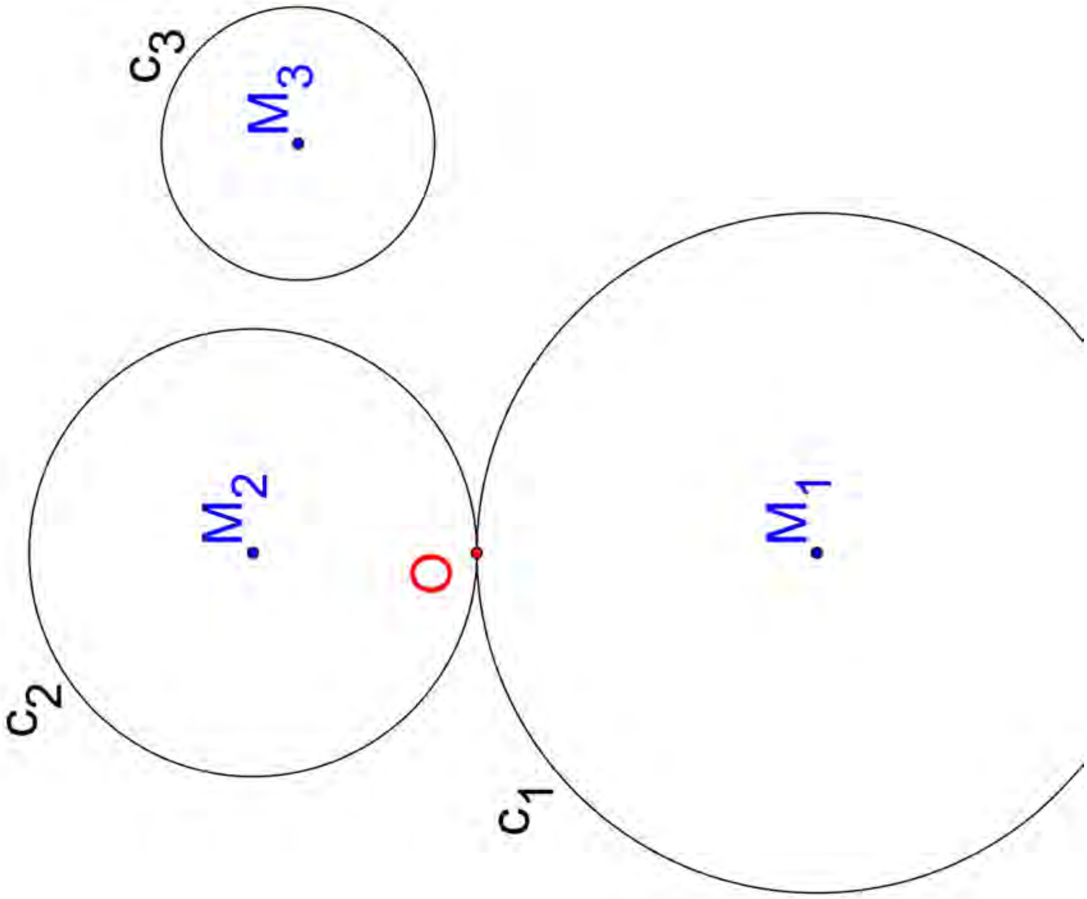
Tipp: Zeigen Sie zuerst, dass $k'_{\text{Lösung}}$ im Allgemeinen auf einen Kreis abgebildet wird. Nehmen Sie dabei an, dass $O \notin k'_{\text{Lösung}}$ und benutzen Sie Aufgabe 2.4. Zeigen Sie dann, dass dieser Kreis c_1, c_2 und c_3 je genau einmal schneidet, das heisst also: berührt.

3.3 Arbeitsblätter

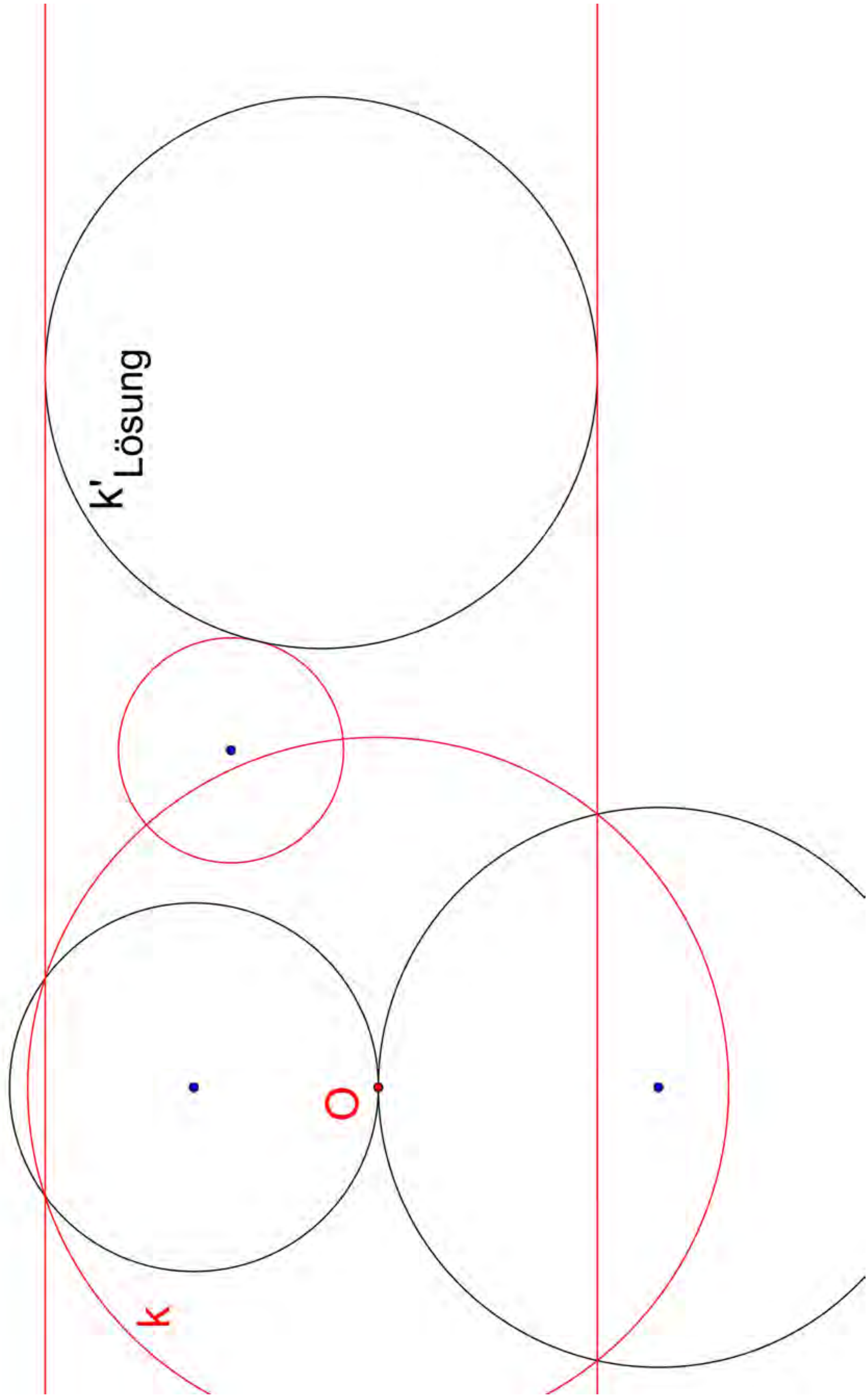
Aufgabe 3.1: **Arbeitsblatt**



Aufgabe 3.2: **Arbeitsblatt**



Aufgabe 3.3: Arbeitsblatt



3.4 Drei Kreise

Damit können wir auch den allgemeinen Fall mit 3 Kreisen konstruieren. Die Konstruktion beruht im Wesentlichen darauf, dass die Situation mit drei beliebigen Kreisen auf diejenige aus Aufgabe 3.3 reduziert wird.

Aufgabe 3.5 Benutzen Sie das Geogebrapplet um die Konstruktion des inneren und des äusseren Lösungskreises nachzuvollziehen.[4] Machen Sie sich folgende Gedanken zu jedem Schritt:
- Wie konstruiert man diesen Schritt?
- Weshalb funktioniert der Schritt?

Tipp: Zur Übersichtlichkeit lassen sich die Kreismittelpunkte M_2, M_3 verschieben und auch die Radien r_1, r_2, r_3 können angepasst werden. Ausserdem sind Teile der Konstruktion ein- und ausblendbar.

3.5 Ausblick

Mit diesem Leitprogramm haben Sie zwei für Sie neue Dinge in der Geometrie kennengelernt: Auf der einen Seite kennen und beherrschen Sie nun eine neue Abbildung und Konstruktionsart, auf der anderen Seite haben Sie auch eine Geometriesoftware kennengelernt:

Inversion am Kreis
Die Inversion am Kreis erlaubt das einfache Lösen verschiedener schwieriger Probleme der Euklidschen Geometrie. Darüber hinaus gibt es auch verschiedene andere Anwendungen in Gebieten wie zum Beispiel der Möbiustransformation (eine Möbiustransformation $f(z)$ setzt sich aus verschiedenen hintereinandergeschalteten Abbildungen $f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1(z)$ zusammen. Dabei ist f_2 die Inversion am Einheitskreis).

Dynamische Geometriesoftware, hier GeoGebra (`http://www.geogebra.org`)
Hauptvorteil dynamischer Geometriesoftware ist wohl der Zugmodus, der es erlaubt, freie Punkte in einer Skizze zu verschieben, wobei die davon abhängigen geometrischen Konstrukte sich dynamisch anpassen. Dies erlaubt es, mit einer einzigen Skizze im Nachhinein auch andere Startpunkte auszuprobieren. Darüber hinaus zeigt GeoGebra auch algebraischen Definitionen der mathematischen Objekte an und kann somit auch Längen oder Winkel messen.

Es sei Ihnen herzlich empfohlen, GeoGebra zu installieren und sich damit vertraut zu machen:
`http://www.geogebra.org/cms/de/download`

Eine weitere Anwendung der Inversion in Verbindung mit GeoGebra finden Sie (auf englisch) hier:[5]
`http://www.geogebra.org/en/examples/frisbee/worksheets/pappus_chain.html`

[4] Die Konstruktion orientiert sich an der Konstruktion aus [Ogi76].
[5] Ein ganzes Leitprogramm dazu finden Sie unter: [pap11].

Lösungen

Lösungen zu den Aufgaben.

Kapitel 1: Einführung

Aufgabe 1.1: Wir sagen:

- eine Gerade ist ein Kreis mit Radius ∞.
- eine Punkt ist ein Kreis mit Radius 0.

Aufgabe 1.3: Wir erhalten:[6]

Aussage	Formulierung in Worten
$\lvert OP\rvert \cdot \lvert OP'\rvert = r^2$ $\Rightarrow \lvert OP'\rvert \cdot \lvert OP\rvert = r^2$	Ist P' der inverse Punkt zu P, so ist auch P der inverse Punkt zu P'.
$\lvert OP\rvert < r \Rightarrow \lvert OP'\rvert > r$	Ist P im Innern des Kreises k, so ist P' ausserhalb von k.
$\lvert OP\rvert > r \Rightarrow \lvert OP'\rvert < r$	Ist P ausserhalb des Kreises k, so ist P' im Innern von k.
$\lvert OP\rvert = r \Rightarrow \lvert OP'\rvert = r$	Liegt P auf dem Kreis k, so auch P'.

Tabelle 4.1: Grundlegende Eigenschaften der Inversion

Gilt $|OP| = r$ so ist insbesondere $P = P'$ und man nennt P einen *invarianten Punkt.* Ferner gilt, je weiter P vom Kreismittelpunkt O entfernt ist, desto näher muss P' zu O liegen und umgekehrt.

[6]Tabelle aus [Kun03].

Aufgabe 1.4: Sei k ein Kreis mit Radius r um O. Der Punkt P liege ausserhalb von k.

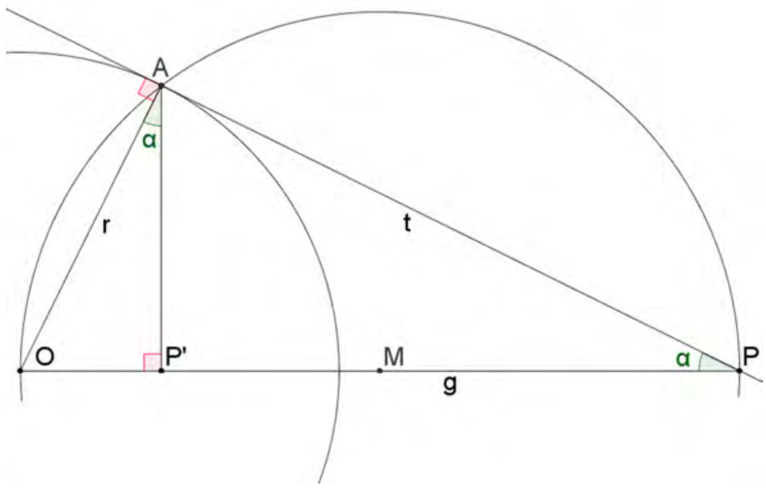


Abbildung 4.4: Konstruktion für ein P ausserhalb von k

Dann konstruieren wir P' wie folgt (Abbildung 4.4):
Als erstes zeichnen wir eine Gerade g durch O und P, da P' ebenfalls auf g zu liegen kommen muss. Um die Tangente t und den Punkt A zu erhalten, müssen wir zuerst den Thaleskreis um M über OP konstruieren. Danach zeichnen wir die Senkrechte zu g durch A. Der Schnittpunkt der Senkrechten mit g ergibt den gesuchten inversen Punkt P'.

Bemerkung: P' ist tatsächlich der gesuchte inverse Punkt, da die genau gleichen Bemerkungen wie im Beweis für P innerhalb von k gelten.

Aufgabe 1.5: Sei k ein Kreis mit Radius r um O. Der Punkt P liege ausserhalb von k.

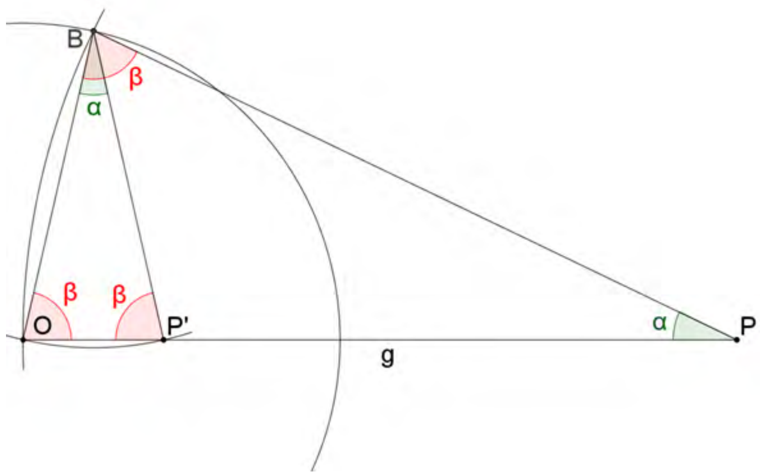


Abbildung 4.5: Konstruktion für ein P ausserhalb von k

Dann konstruieren wir P' wie folgt (Abbildung 4.5):
Als erstes zeichnen wir eine Gerade g durch O und P, da P' ebenfalls auf g zu liegen kommen muss. Danach zeichnen wir einen Kreis mit Radius $|OP|$ um P und erhalten als Schnittpunkt mit k den Punkt B. Ein weiterer Kreis, diesmal mit Radius $|OB| = r$ um B, ergibt als Schnittpunkt mit g den gesuchten inversen Punkt P'.

Beweis Sei $\sphericalangle POB = \beta$. Da O und B auf einem Kreisbogen um P liegen, ist das Dreieck OPB gleichschenklig mit Basiswinkel β (das heisst es gilt $\sphericalangle POB = \beta = \sphericalangle OBP$). Auch O und P' liegen auf einem gemeinsamen Kreisbogen, nämlich um den Mittelpunkt B. Da $\sphericalangle POB = \beta = \sphericalangle P'OB$ ist auch $\sphericalangle BP'O = \beta$ und es gilt $|OB| = |P'B|$.

Die Dreiecke $\Delta OBP'$ und ΔBPO sind also ähnlich und es gilt

$$\frac{|OP'|}{r} = \frac{|OP'|}{|OB|} = \frac{|OP'|}{|P'B|} = \frac{|BO|}{|OP|} = \frac{r}{|OP|}$$

und somit $|OP| \cdot |OP'| = r^2$.

Da O, P und P' auf einer Geraden liegen, folgt sofort dass P' der zu P inverse Punkt ist. □

Kapitel 2: Eigenschaften der Inversion

Aufgabe 2.1:

	Urbild: Eine Gerade, die	Bild
a	den Inversionskreis nicht schneidet	Ein Kreis durch O, der den Inversionskreis nicht schneidet
b	den Inversionskreis schneidet	Ein Kreis durch die Schnittpunkte von Gerade und Inversionskreis und durch O
c	durch den Mittelpunkt O verläuft	Dieselbe Gerade!

Aufgabe 2.2:

	Urbild: Ein Kreis der	Bild
a	durch den Mittelpunkt O verläuft	Eine Gerade, die nicht durch den Mittelpunkt O verläuft
b	nicht durch den Mittelpunkt O verläuft	Ein Kreis, der nicht durch den Mittelpunkt O verläuft
c	senkrecht zum Inversionskreis steht	Derselbe Kreis!

Aufgabe 2.3: Wir gehen fast genau gleich vor, wie beim Beweis des Lemmas:

Beweis Als erstes wählen wir den Punkt P auf c, der den grösstmöglichen Abstand von O hat. Dann ist der dazugehörige inverse Punkt P' derjenige Punkt des Bildes, der zu O die kleinste Distanz aufweist. Falls das Bild eine Gerade ist, so ist es sicherlich die Senkrechte zu OP' durch P'. Wir wollen also beweisen, dass für jeden Punkt Q auf c der inverse Punkt Q' auf dieser Senkrechten liegt, das heisst $\sphericalangle Q'P'O = 90°$.

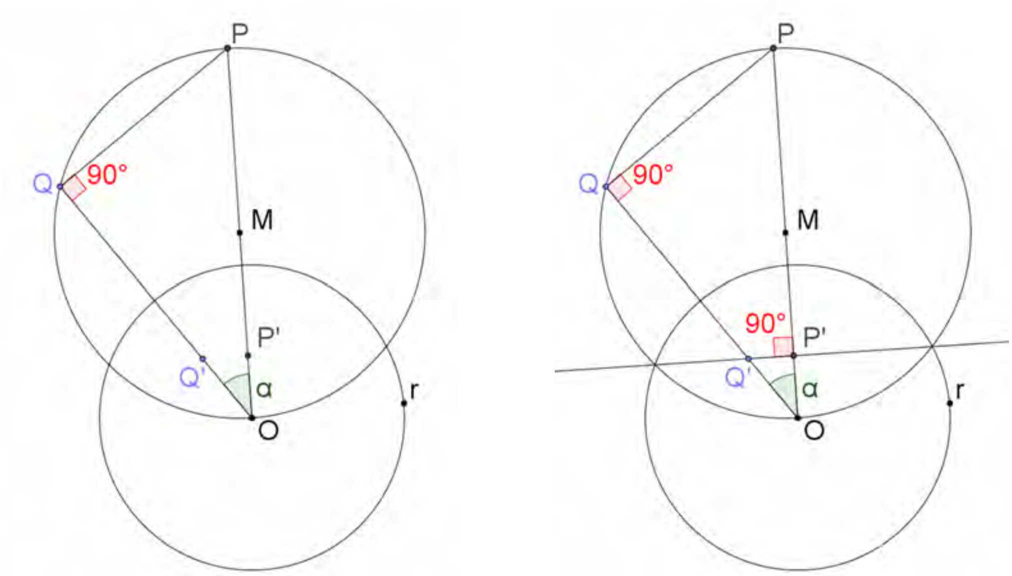


Abbildung 4.6: Ein Kreis wird auf eine Gerade abgebildet

Wir wählen deshalb als erstes einen weiteren Punkt Q auf dem Kreis c (Thaleskreis über OP!) und betrachten den dazu inversen Punkt Q' sowie die Gerade durch die Punkte Q, Q' und O. Es gelten folgende Gesetzmässigkeiten:

$$\sphericalangle QOP = \alpha = \sphericalangle P'OQ' \tag{4.1}$$

$$|OQ| \cdot |OQ'| = r^2 = |OP| \cdot |OP'|$$

$$\text{und somit } \frac{|OQ'|}{|OP'|} = \frac{|OP|}{|OQ|} \tag{4.2}$$

Aus den Gleichungen (4.1) und (4.2) folgt, dass die Dreiecke ΔOQP und $\Delta OP'Q'$ ähnlich sind und damit $\sphericalangle OP'Q' = \sphericalangle OQP = 90°$, unabhängig vom gewählten Punkt Q auf g. Das Bild der Inversion des Kreises c ist deshalb die Senkrechte zu OP' durch P'. $\square$

Aufgabe 2.4: Die Inversion bildet Figuren wie folgt aufeinander ab:

eine Gerade g durch O	ein zum Inversionskreis k rechtwinkliger Kreis c mit $O \notin c$
eine Gerade g mit $O \notin g$	ein Kreis d mit $O \notin c$
ein Kreis c mit $O \notin c$	eine Gerade g durch O
ein zum Inversionskreis k rechtwinkliger Kreis c mit $O \notin c$	ein Kreis c durch O

Aufgabe 2.5:

a) Als erstes konstruieren wir die zu A, B und C inversen Punkte A', B' und C'. Geraden werden meistens auf Kreise abgebildet. Deshalb werden die Seiten des Dreiecks nicht auf Strecken abgebildet, sondern auf Kreisbögen. Wir konstruieren also 3 Kreise:

- k_1: Umkreis der Punkte O, A' und B'
- k_2: Umkreis der Punkte O, C' und B'
- k_3: Umkreis der Punkte O, A' und C'

Damit erhalten wir ein Kreisbogen-Dreieck (Abbildung 4.7). Liegt hingegen eine der Dreiecksseiten auf einer Geraden durch O, so wird diese auf eine Strecke abgebildet: (Abbildung 4.8).

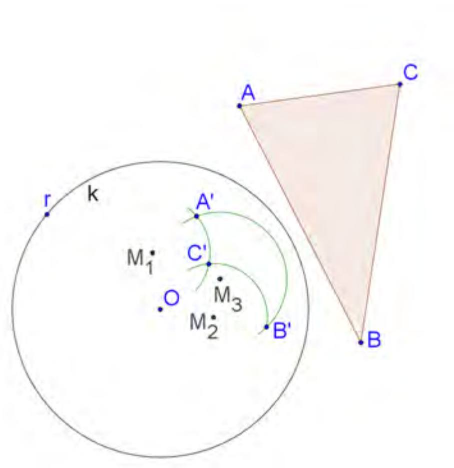


Abbildung 4.7: Kreisbogendreieck

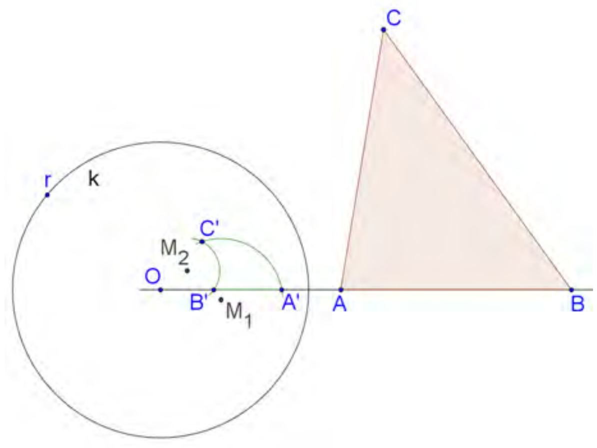


Abbildung 4.8: Zweite Lösung

b) Unter Inversion kehrt sich der Umlaufsinn von Figuren. Dies ist nicht unerwartet, da ja zu O ferne Punkte auf zu O nahe Punkte abgebildet werden und umgekehrt.

Aufgabe 2.6:

a) Die beiden Winkel sind nicht gleich. Wenn wir allerdings an die Konstruktion des Bildes eines Dreiecks zurückdenken, so fällt uns auf, das wir ja ein Kreisbogendreieck und kein normales Dreieck erhalten haben. Wir müssen also die Winkel zwischen den Kreisbögen konstruieren!

b) Die Winkel zwischen den Kreisbögen erhalten wir, indem wir die Tangenten an die Kreise legen und den Winkel zwischen den Tangenten bestimmen. Das GeoGebra-Applet liefert also einen Hinweis, dass der so erhaltene Winkel stets gleich gross ist, wie der Winkel im Urbild. Die Inversion bildet also Winkel im Dreieck auf gleich grosse Winkel ab.

Aufgabe 2.7: Wir wissen, dass aufgrund der Inversion (wie in Abbildung 4.9) gilt:

$$|OA| \cdot |OA'| = r^2 = |OB| \cdot |OB'|$$
$$\text{und damit } \frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|OB'|}{|OA'|}$$

Da ausserdem $\sphericalangle AOB = \sphericalangle B'OA'$ gilt, sind die Dreiecke ΔOAB und $\Delta OB'A'$ ähnlich und es gilt

$$\sphericalangle OB'A' = \sphericalangle OAB = \alpha.$$

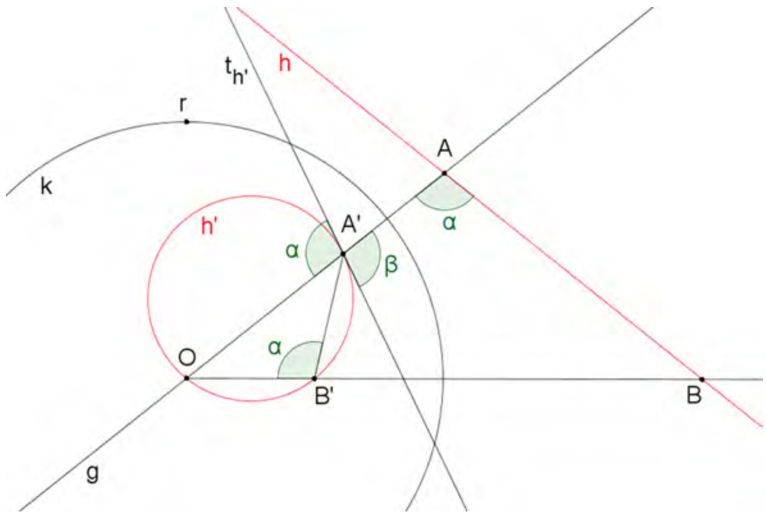


Abbildung 4.9: Der Winkel zwischen g und h bleibt unter Inversion gleich: $\sphericalangle(g, h) = \sphericalangle(h', g')$

Aus dem Tangentenwinkelsatz $(*)$ folgt nun sofort die Behauptung, da

$$\beta = \sphericalangle(t_{h'}, g) = \sphericalangle(t_{h'}, OA') \overset{(*)}{=} \sphericalangle OB'A' = \alpha.$$

Aufgabe 2.8: Der Winkel zwischen zwei Kurven ist definiert als der Winkel zwischen den Tangenten der Kurve am Schnittpunkt. Tangenten sind jedoch Geraden. Diese Geraden werden unter Inversion auf Kreise abgebildet. Der inverse Winkel ist also der Winkel zwischen den Kreisen. Diesen erhalten wir, indem wir wiederum die Tangenten an die Kreise konstruieren. Aus Aufgabe 2.6 wissen wir bereits, dass der so erhaltene Winkel gleich gross ist. Die Inversion ist also eine *winkeltreue Abbildung*.

Kapitel 3: Anwendung

Aufgabe 3.1: Da der Lösungskreis $k_{\text{Lösung}}$ beide Geraden berühren, aber nicht schneiden soll, muss der Mittelpunkt $M_{\text{Lösung}}$ auf einer Parallelen m liegen, die in der Mitte der beiden Geraden verläuft (siehe Abbildung 4.10). Sei d der Abstand von m zu den Geraden. Dann gilt für den Radius $r_{\text{Lösung}}$ des Lösungskreises $r_{\text{Lösung}} = d$.

Da der Lösungskreis auch den Kreis und nicht nur die Geraden berühren soll, ist der Abstand von $M_{\text{Lösung}}$ zu M gleich der Summe der beiden Radien. Dies ergibt $r + r_{\text{Lösung}} = r + d$. Somit können wir einen Kreis um M mit Radius $r + d$ konstruieren und erhalten als Schnittpunkt mit m den Mittelpunkt des Lösungskreises. Da wir den Radius $r_{\text{Lösung}} = d$ bereits kennen, können wir den Lösungskreis sofort einzeichnen.

Beachten Sie, dass wir eigentlich zwei Schnittpunkte $M_{\text{Lösung 1}}$ und $M_{\text{Lösung 2}}$ erhalten und damit auch zwei Lösungskreise.

Aufgabe 3.2: Damit c_3 auf sich selbst abgebildet wird, muss nach Aufgabe 2.2 c_3 senkrecht auf den Inversionskreis stehen. Wir konstruieren also die Tangente von O an c_3 und erhalten den Berührungspunkt T. Nun steht $OT = r$ senkrecht auf M_3T. Wir

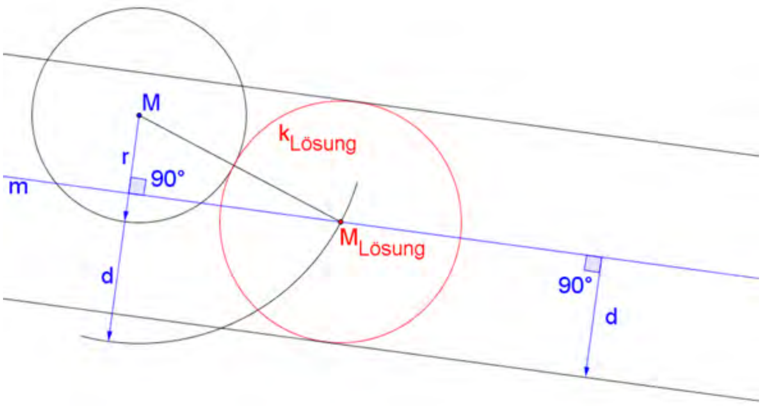


Abbildung 4.10: Konstruktion des Lösungskreis

zeichnen den Kreis um O mit Radius r und erhalten den gesuchten Inversionskreis $k(O, r)$ (siehe Abbildung 4.11).

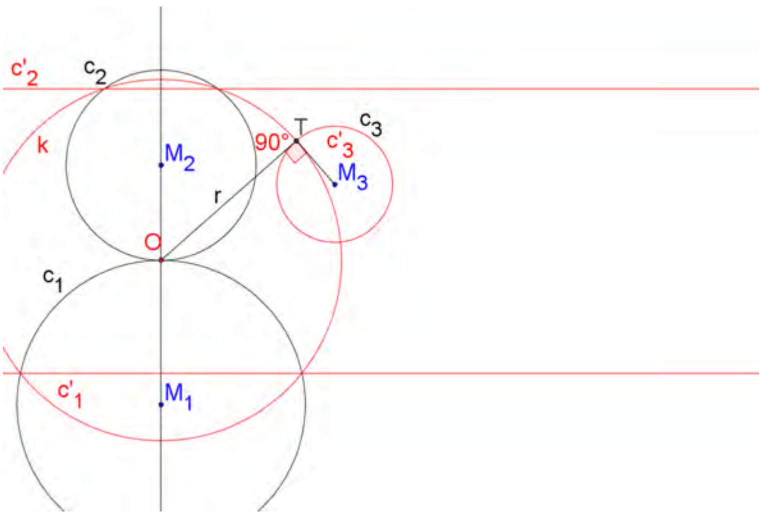


Abbildung 4.11: Konstruktion des Inversionskreises und der Bilder c'_1, c'_2, c'_3

Da die Kreise c_1 und c_2 durch O verlaufen, werden sie nach Aufgabe 2.2 auf Geraden abgebildet. O liegt als Berührungspunkt auf der Geraden durch M_1, M_2, welche die Kreise c_1 und c_2 halbiert. Die rechten Hälfte der Kreise werden symmetrisch zu den linken Hälften invertiert. Die Geraden c'_1 und c'_2 stehen deshalb beide senkrecht auf M_1M_2 und sind also parallel.

Aufgabe 3.3: Wir konstruieren das Bild von $k'_{\text{Lösung}}$ wie in Abbildung 4.12.

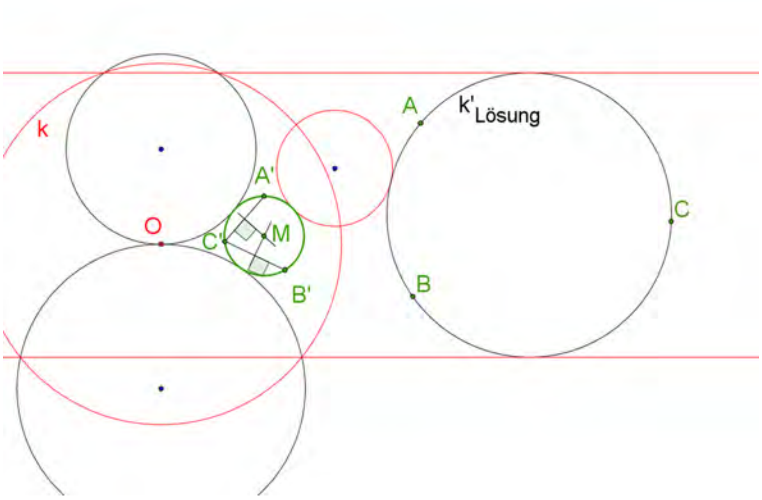


Abbildung 4.12: Inversion des Kreises $k'_{\text{Lösung}}$ an k

Als erstes wählen wir drei unterschiedliche Punkte A, B, C auf $k'_{\text{Lösung}}$ und konstruieren die zu ihnen inversen Punkte A', B', C' (in Bezug auf k). Da $k'_{\text{Lösung}}$ ein Kreis ist, der nicht durch O geht, ist sein Bild ebenfalls ein Kreis $k_{\text{Lösung}}$. Da A', B', C' auf diesem Kreis liegen müssen, erhalten wir $k_{\text{Lösung}}$, indem wir den Umkreis des Dreiecks $\Delta A'B'C'$ konstruieren.

Lemma 4.1 *Die Spiegelung eines Lösungskreises $k'_{\text{Lösung}}$ an die Kreise c'_1, c'_2, c'_3 am Inversionskreis $k(O, r)$ ergibt einen Lösungskreis $k_{\text{Lösung}}$ an die ursprünglichen Kreise c_1, c_2 und c_3.*

Aufgabe 3.4: Wir beweisen Lemma 4.1.

Beweis $k'_{\text{Lösung}}$ ist ein Kreis, der nicht durch den Mittelpunkt O des Inversionskreises verläuft. Damit wird $k'_{\text{Lösung}}$ nach Aufgabe 2.2 wiederum auf einen Kreis abgebildet. Wir nennen diesen Kreis $k_{\text{Lösung}}$.

Annahme: *$k_{Lösung}$ und c_1 haben zwei oder mehr Schnittpunkte $P_1, P_2, \ldots$*
Dann liegen die invertierten Punkte P'_1, P'_2 sowohl auf dem Lösungskreis $k'_{\text{Lösung}}$ als auch auf c'_1. Dann haben aber $k'_{\text{Lösung}}$ und c'_1 zwei Schnittpunkte. Dies kann aber nicht sein, da $k'_{\text{Lösung}}$ nach Konstruktion als Lösungskreis *genau* einen Berührpunkt an c'_1 hat. Widerspruch. $\lightning$

Dasselbe Argument können wir auch für die Kreise c_1, c_2 und auch für 0 Punkte anstatt 2 Punkte durchführen. Deshalb muss $k_{\text{Lösung}}$ je genau einen Berührpunkt an c_1, c_2 und c_3 aufweisen. $\square$

Aufgabe 3.5: Erklärungen zu den einzelnen Schritten:

Schritte 1-7 Wir verändern die Radien r_1, r_2 der Kreise c_1 und c_2 je um δ und zwar so, dass sich die beiden Kreise berühren. Der Radius r_3 wird ebenfalls um δ angepasst. Dies ist aus folgendem Grund möglich:
Finden wir einen Lösungskreis zu den angepassten Kreisen, so können wir den Lösungskreis ebenfalls um δ verändern und erhalten einen Lösungskreis an die ursprünglichen Kreise. Im Applet werden die Radien vergrössert, durch Anpassung der Radien im Applet ist aber auch der Fall einer Verkleinerung denkbar.

Schritte 8-9 Konstruktion des Inversionskreises analog zu Aufgabe 3.2.

Schritt 10 Inversion der vergrösserten Kreise analog zu Aufgabe 3.2.

Schritte 11-16 Konstruktion des ersten Lösungskreises $k1'$ an die invertierten Kreise analog zu Aufgabe 3.1.

Schritt 17 Inversion des ersten Lösungskreises $k1'$.
$\rightarrow$ Lösungskreis $k1$ an die ursprünglichen, aber noch um δ veränderten Kreise.

Schritte 18-19 Konstruktion des zweiten Lösungskreises $k2'$ an die invertierten Kreise analog zu Aufgabe 3.1.

Schritt 20 Inversion des zweiten Lösungskreises $k2'$.
$\rightarrow$ Lösungskreis $k2$ an die ursprünglichen, aber noch um δ veränderten Kreise.

Schritte 21-24 Anpassung der Radien der Lösungskreise $k1, k2$ um δ.
$\rightarrow$ Lösungskreise $k_{\text{Lösung 1}}$ und $k_{\text{Lösung 2}}$.

Literaturverzeichnis

Quellen: Bücher, Artikel, Websites.

Im Leitprogramm nicht zitierte, aber hier aufgeführte Quellen habe ich zur Einarbeitung ins Thema genutzt. Sie sind ebenfalls als Lektüre zu empfehlen.

[Bär11] Andreas Bärtschi, *Inversion am Kreis - Webapplets*, Online, aktualisiert am, 17. März 2011, `http://www.andreasbaertschi.ch/fachdidaktik/`.

[Cox81] Harold S.M. Coxeter, *Unvergängliche Geometrie*, pp. 104–122, Birkhäuser Verlag, Basel, 1981.

[CR67] Richard Courant and Herbert Robbins, *Was ist Mathematik?*, pp. 112–117, Springer-Verlag, Heidelberg, 1967.

[Joh07] Roger A. Johnson, *Advanced Euclidean Geometry*, pp. 43–57, Dover Publications, Mineola, N.Y., 2007.

[Ked11] Kiran S. Kedlaya, *Notes on Euclidean Geometry*, Online, zuletzt aufgerufen am, 8. März 2011, `http://www-math.mit.edu/~kedlaya/geometryunbound/geom-080399.pdf`.

[Kun03] Paul Kunkel, *Inversion Geometry*, Online, aktualisiert am, 4. September 2003, `http://whistleralley.com/inversion/inversion.htm`.

[Kun11] ______, *Inversion Geometry Webapplet*, Geometer's Sketchpad, Online, zuletzt aufgerufen am, 1. März 2011, `http://whistleralley.com/java/inverse.htm`.

[Mel08] Melchoir, *The eight solutions of Apollonius' problem.*, Online, aktualisiert am, 15 Mai 2008, `http://en.wikipedia.org/wiki/File:Apollonius8ColorMultiplyV2.svg`.

[Ogi76] C. Stanley Ogilvy, *Unterhaltsame Geometrie*, pp. 16–34, Vieweg, Braunschweig, 1976.

[Oli03] Oliezekat, *Miwiki the ant*, Online, aktualisiert am, 26. August 2003, `http://meta.wikimedia.org/wiki/File:Miwiki_the_ant.png`.

[pap11] *Archimedes' Frisbee*, Online, zuletzt aufgerufen am, 8. März 2011, `http://www.geogebra.org/en/examples/frisbee/`.

[Sch50] Hermann Schmidt, *Die Inversion und ihre Anwendungen*, Verlag R. Oldenbourg, München, 1950.