5ème séance:

MECANIQUE (IV) / FLUIDES (I)

10 mars 2004

MECANIQUE (IV)

- Élasticité, vibrations
- Oscillations

LES FLUIDES (I)

- Densité et pression
- Circulation du sang
- Le principe d'Archimède
- Écoulement d'un fluide: le théorème de Bernoulli

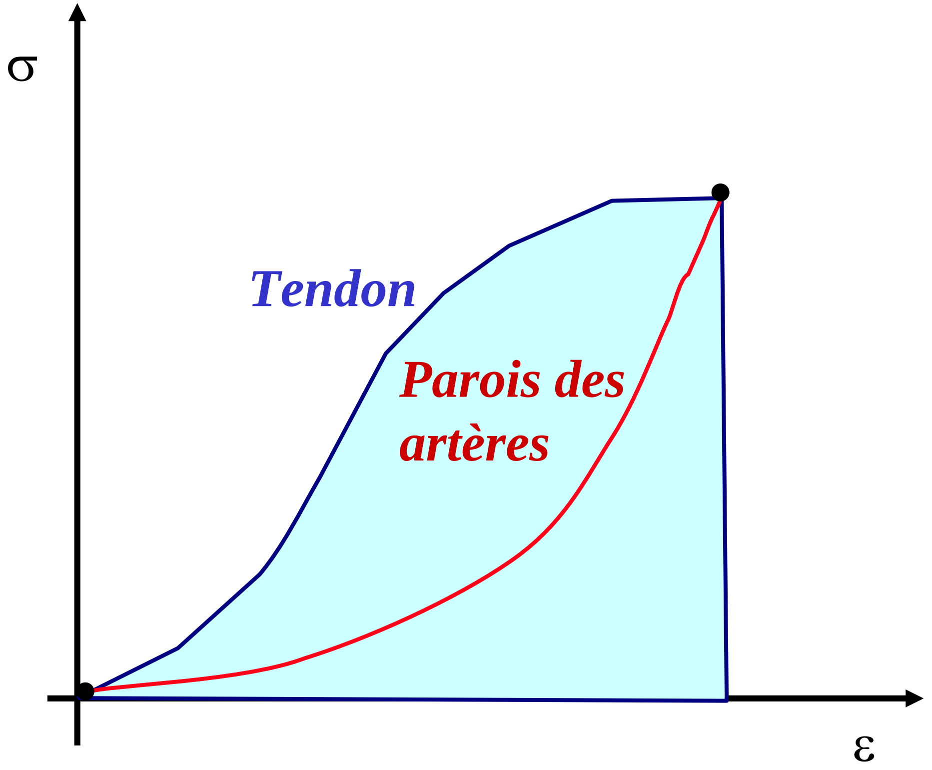
Les propriétés élastiques des vaisseaux sanguins

Le rayon des artères augmente avec la pression mais suit une loi fortement non linéaire dont on admet qu'elle est sous la dépendance de l'élastine aux faibles pressions et sous la dépendance du collagène aux fortes pressions.

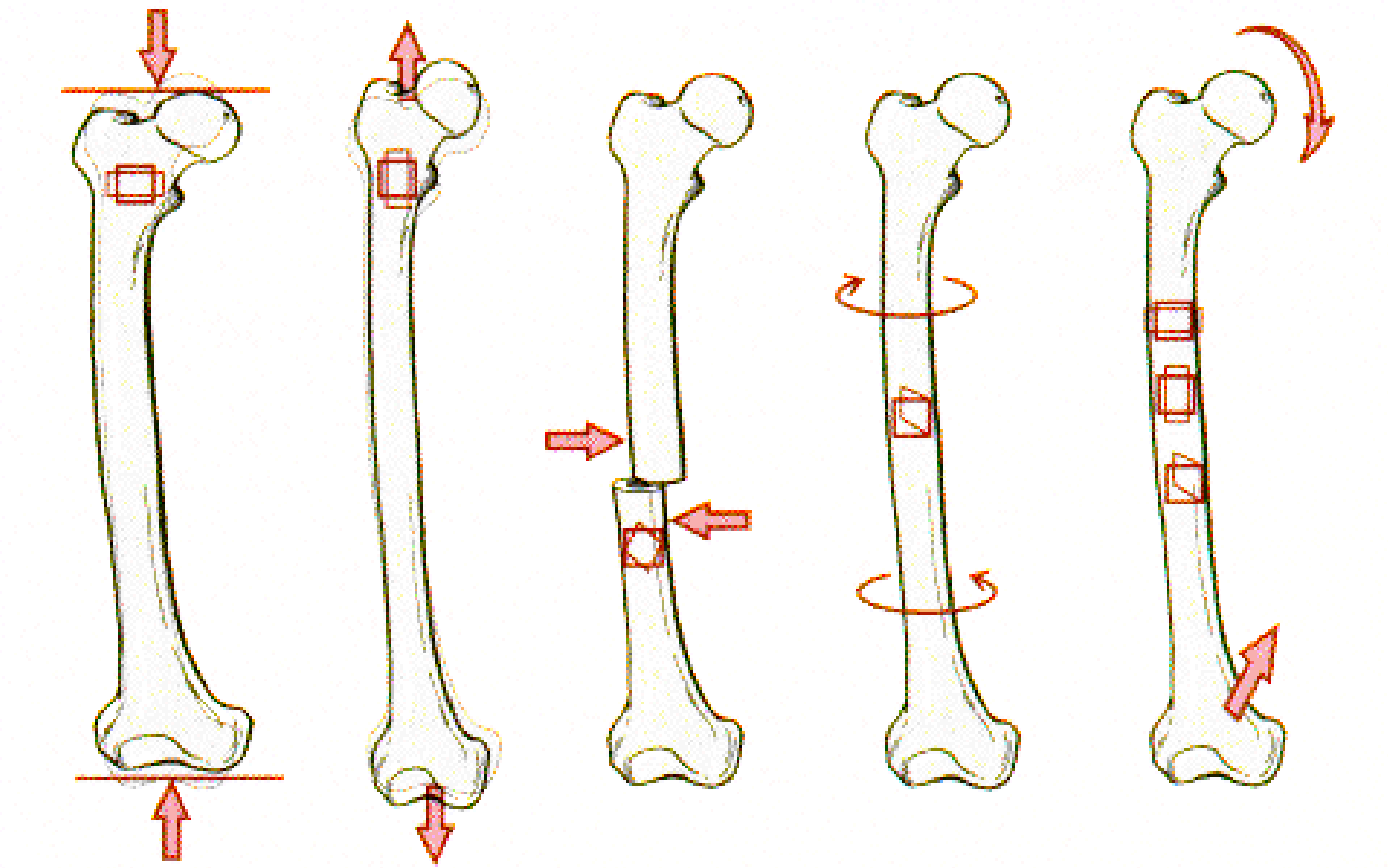
Compliance : traduit la capacité à absorber puis restituer de l'énergie.

Travail effectué lors de l'élongation des tissus:

$$W = \int \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr} = AL \int \overrightarrow{\sigma} \cdot \overrightarrow{d\varepsilon}$$



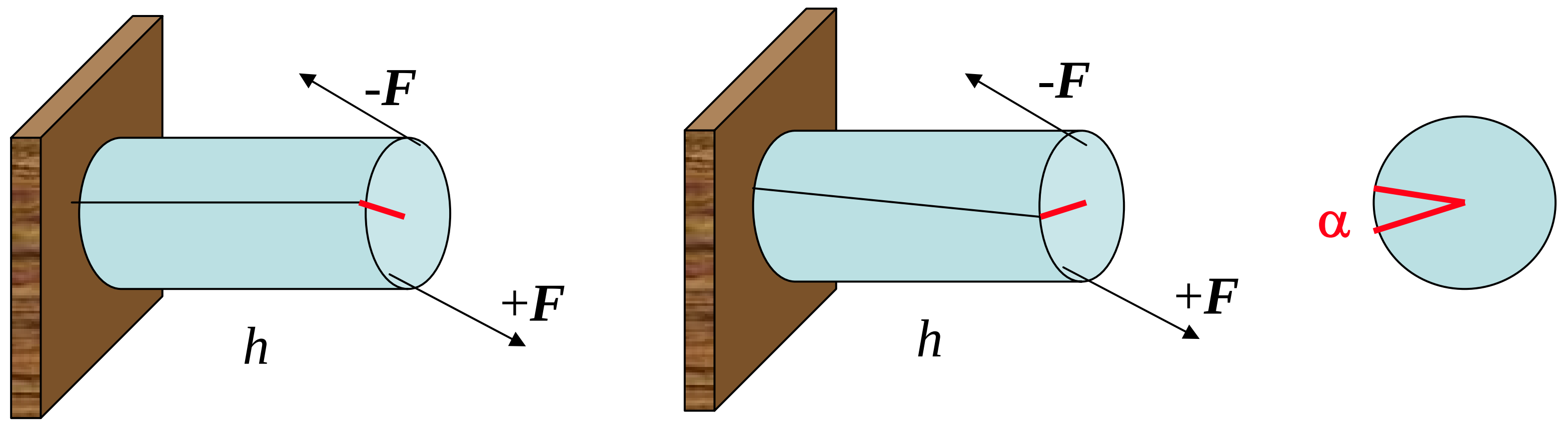
Les types de déformations



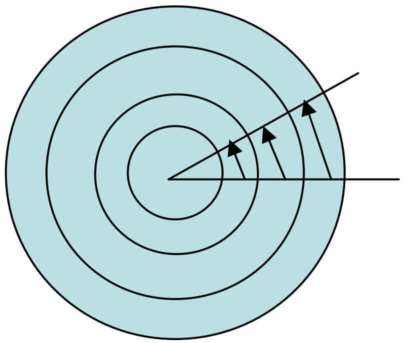
Compression Traction Cisaillement Torsion Flexion

Déformations complexes: la torsion pure

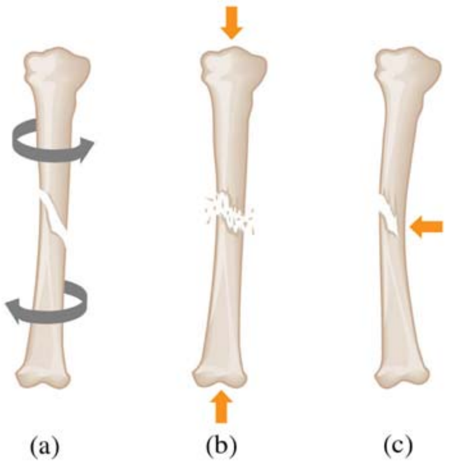
La torsion pure se traduit par l'apparition de contraintes de cisaillement.



Le cylindre de rayon *R* est soumis à un moment de force $\tau = 2RF$ qui le tord d'un angle α. Les couches cylindriques sont d'autant plus tordues qu'on s'éloigne de l'axe. L'effet de torsion est à l'origine du cisaillement.

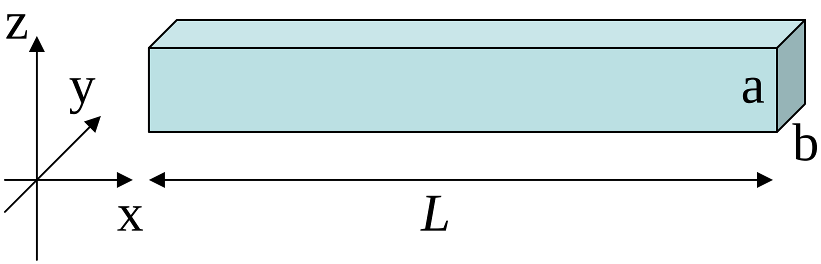


Si l'angle est assez grand, il peut y avoir rupture (p.ex. jambe d'un skieur tordu dans une chute). Un angle α = 3° suffit pour casser le tibia!



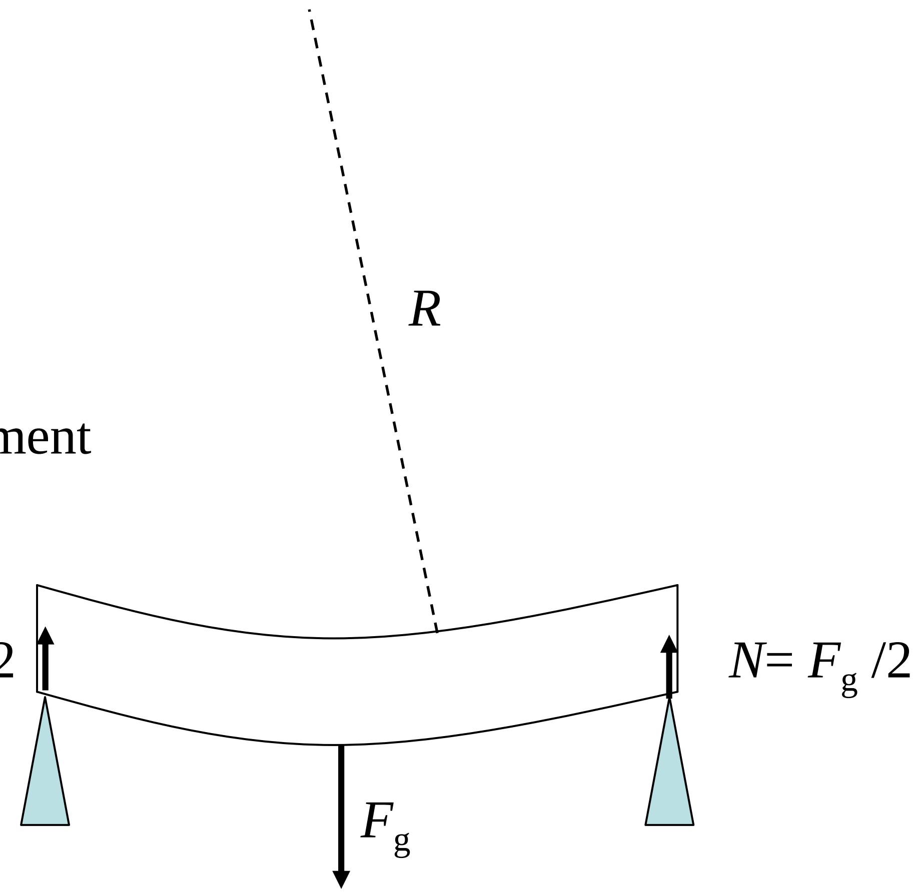
Déformations complexes: la flexion pure

Barre rigide de section a x b et longueur L, appuyée sur les bords et soumise à son poids F_g.



Après flexion, on a approximativement un arc de cercle de rayon R

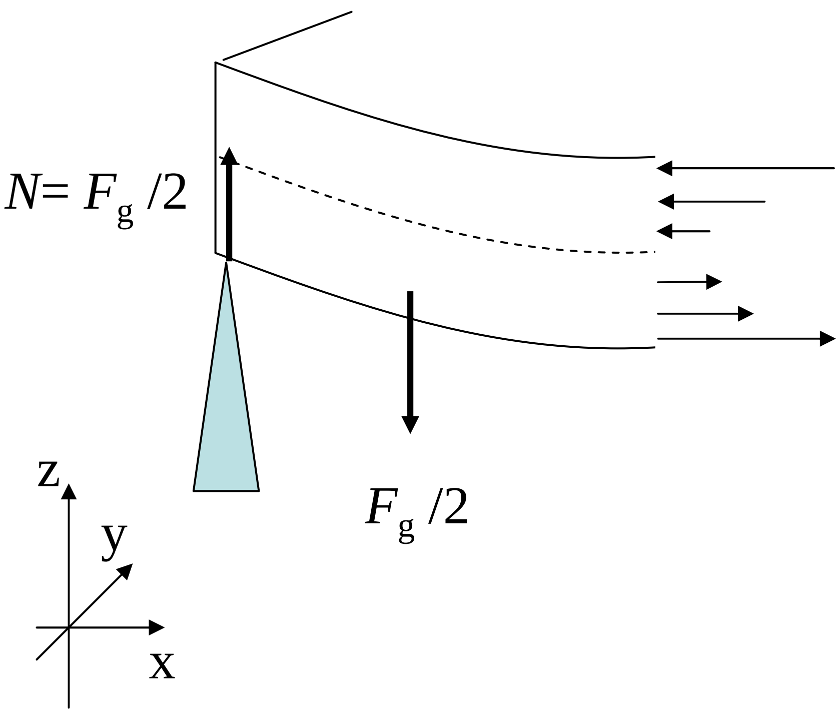
$R \to \infty$ quand $F_g \to 0$



On observe que la partie supérieure de la barre est en compression, celle inférieure en traction

Déformations complexes: la flexion pure

Le système est symétrique par rapport au centre (la barre est homogène). Considérons la moitié gauche. La surface supérieure est plus petite qu' en l'absence de flexion, la surface inférieure est dilatée. A l'intérieur du corps il existe la **surface neutre**, qui n'a pas changé de valeur.
La partie droite exerce des forces sur la partie gauche comme qualitativement indiqué sur la figure.

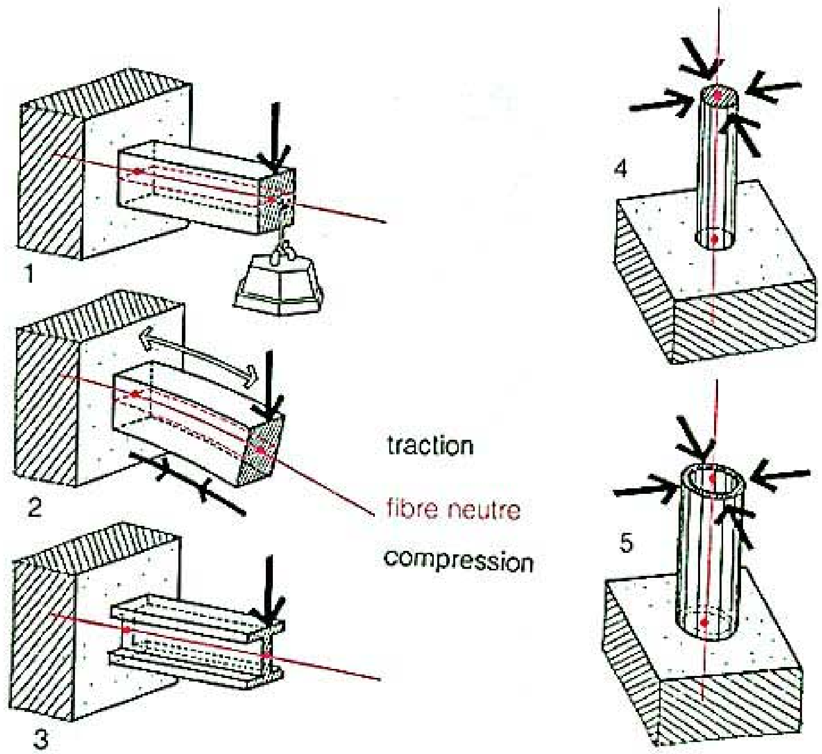


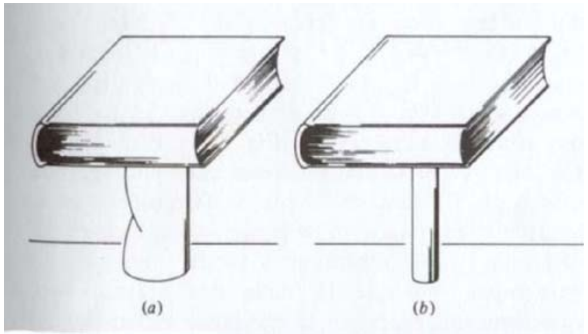
On a la présence d'un moment de forces internes qui cherche à mettre en rotation antihoraire la partie gauche (horaire la droite).

Pour que la flexion soit la plus petite possible, il faut que la quantité de matière soit aussi loin que possible de la surface neutre.

La flexion pure

C'est ainsi qu'une poutre qui a la forme d'un **I** résiste mieux à la flexion produite par des forces verticales qu'une poutre carrée de même section droite construite avec la même quantité de matière. De la même manière, un tube résiste mieux à la flexion qu'une barre pleine de même longueur et de même poids.

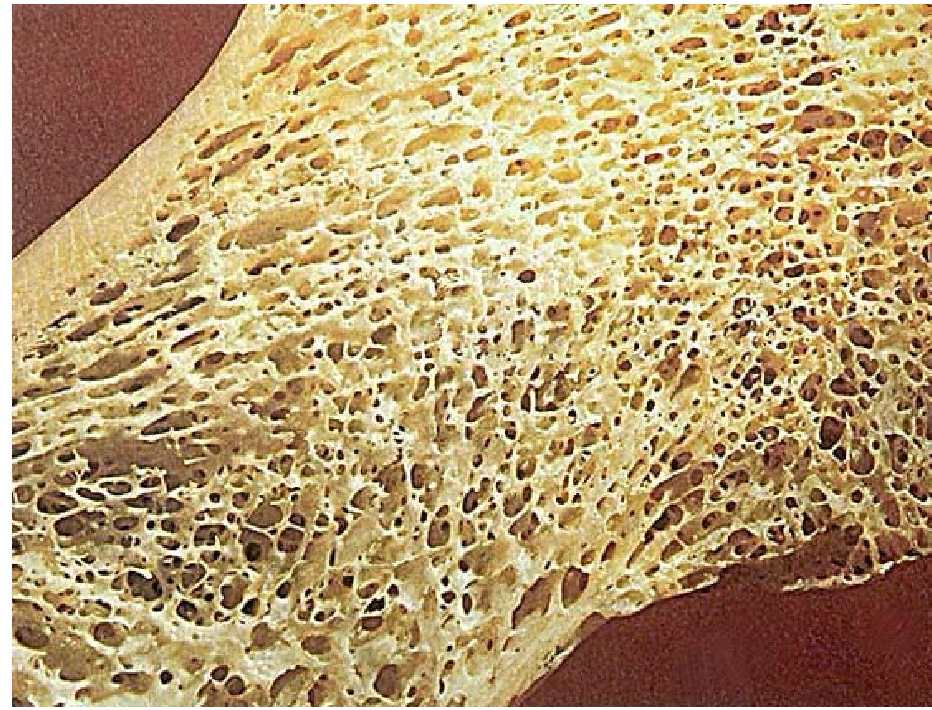




Il est donc préférable de réaliser des éléments de structure ayant un grand diamètre et des parois minces. Il existe toutefois une limite car des structures à parois minces peuvent subir un effet de **flambage** à la suite d'un effort de compression.

Les structures creuses

Dans la nature, on rencontre de nombreuses applications du principe qui établit que des structures creuses sont plus résistantes que des structures pleines de même section droite. **Les os** ont en général une structure creuse. Ainsi le rapport entre les rayons interne et externe du fémur humain vaut environ 0,5 et l’aire de la section droite représente seulement 78% de celle d’un os plein qui aurait la même résistance à la flexion.



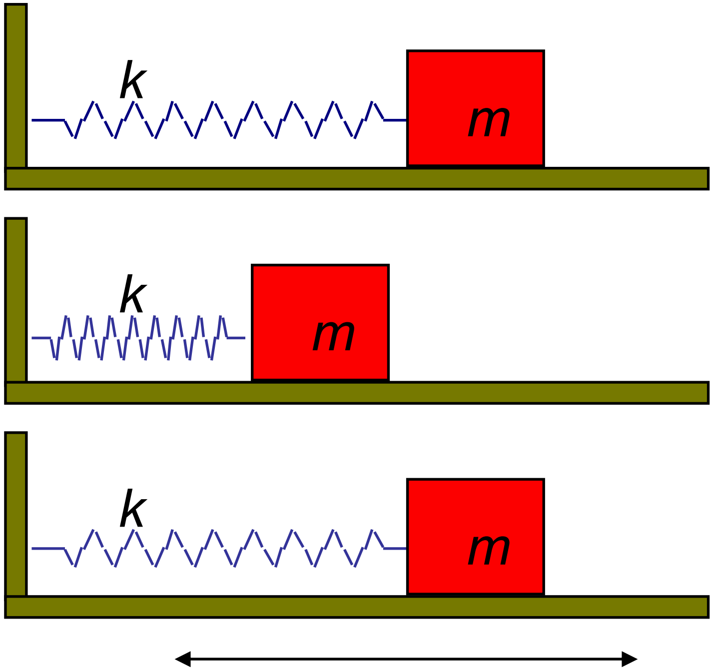
Chez les oiseaux les os ont des parois très minces: le rapport rayon interne sur externe de l’humérus d’un cygne vaut 0,9. Le danger de flambage dans cet os à parois minces est réduit par la présence de filaments osseux de renforcement qui se trouvent à l’intérieur de la structure de l’humérus.

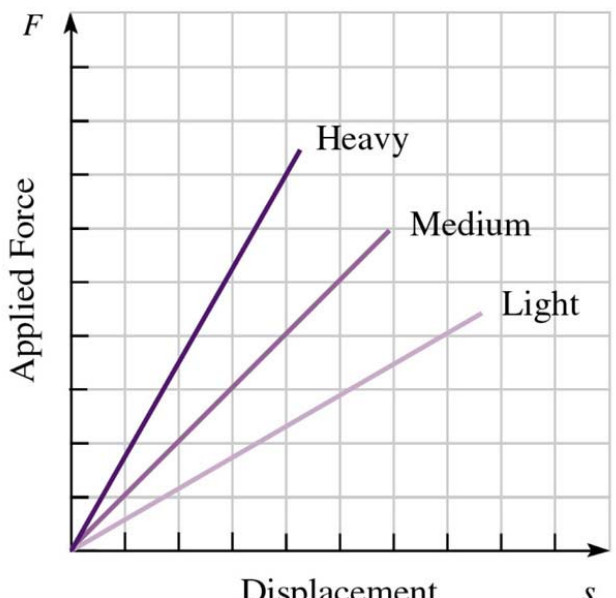
La constante d'élasticité

Hooke avait étudié la proportionnalité entre force ***F*** et la déformation *x* pour les objets élastiques (en particulier les ressorts). La **loi d'Hooke** pour un objet de constante d'élasticité (ou du ressort) *k* est:

$$F = k\,x$$

k est la **constante d'élasticité** qui s'exprime en N/m et *x* la distance étirée ou comprimée.





La pente de chaque courbe est la constante d'élasticité *k*: plus le ressort est rigide, plus *k* est grand.

Les oscillations

Un mouvement qui se répète à intervalles de temps consécutifs égaux est dit **périodique**.

Exemples d’oscillations :

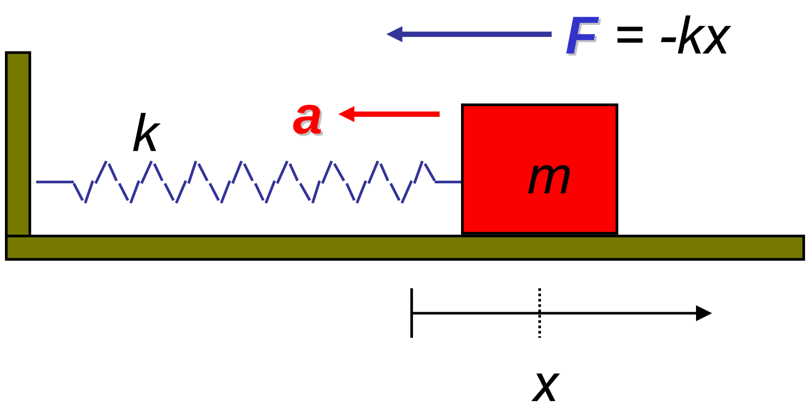
– la balançoire, cordes d’une guitare ....
– molécules d’air qui transmettent la sensation de son,
– les atomes dans un solide qui donne la sensation de température,
– les électrons dans les antennes de radio et TV.

Il existe 2 sortes de mouvements périodiques :

– **Mouvements sur une trajectoire fermée**, qui peuvent être repérés par la rotation périodique d’un angle autour d’un point à l’intérieur de la trajectoire (mouvement de la Terre autour du soleil)

– **Mouvements vibratoires ou oscillatoires**, mouvement périodique dont la forme la plus simple est le mouvement sinusoïdal ou mouvement harmonique simple (MHS).

Le mouvement harmonique simple (MHS)



- En tout instant, il faut ***F*** = *m**a***
- Dans notre cas: *F* = -*kx*

et $ma = m\dfrac{d^2x}{dt^2}$

- Par conséquence, on a:

$$-kx = ma = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

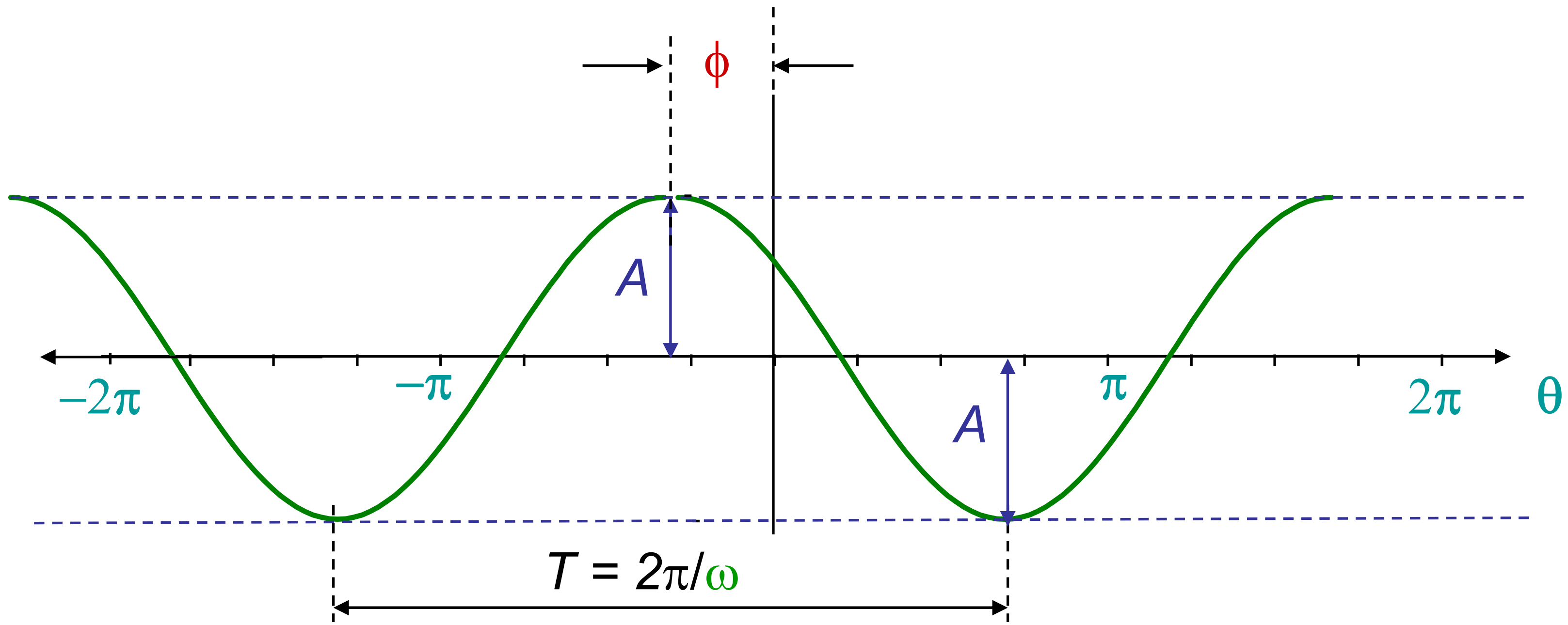
$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x}$$

Une équation différentielle pour *x(t)*, dont la solution générale est:

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega t + \phi)}$$

Il faut déterminer *A*, ω et ϕ pour le mouvement du ressort.

Le mouvement harmonique simple (MHS)



- un cycle est la plus petite séquence qui se répète.
- la fréquence f définit le nombre de cycles par seconde (Hertz: 1 Hz = 1 cycle/s).
- $\omega = 2\pi f$ est la fréquence angulaire/pulsation.
- A est l'amplitude, l´*élongation maximale*.
- ϕ est la phase initiale, dépendante du déplacement et de la vitesse à t = 0.
- la période $T = 1/f = 2\pi/\omega$ est le temps qu'il faut pour que le système accomplisse un cycle.

Le mouvement harmonique simple (MHS)

Vérifions cette solution. A partir de:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

on peut définir

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x}$$

On essaye avec $x = A\cos(\omega t+\phi)$:

$$\frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \phi)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi) = -\omega^2 x$$

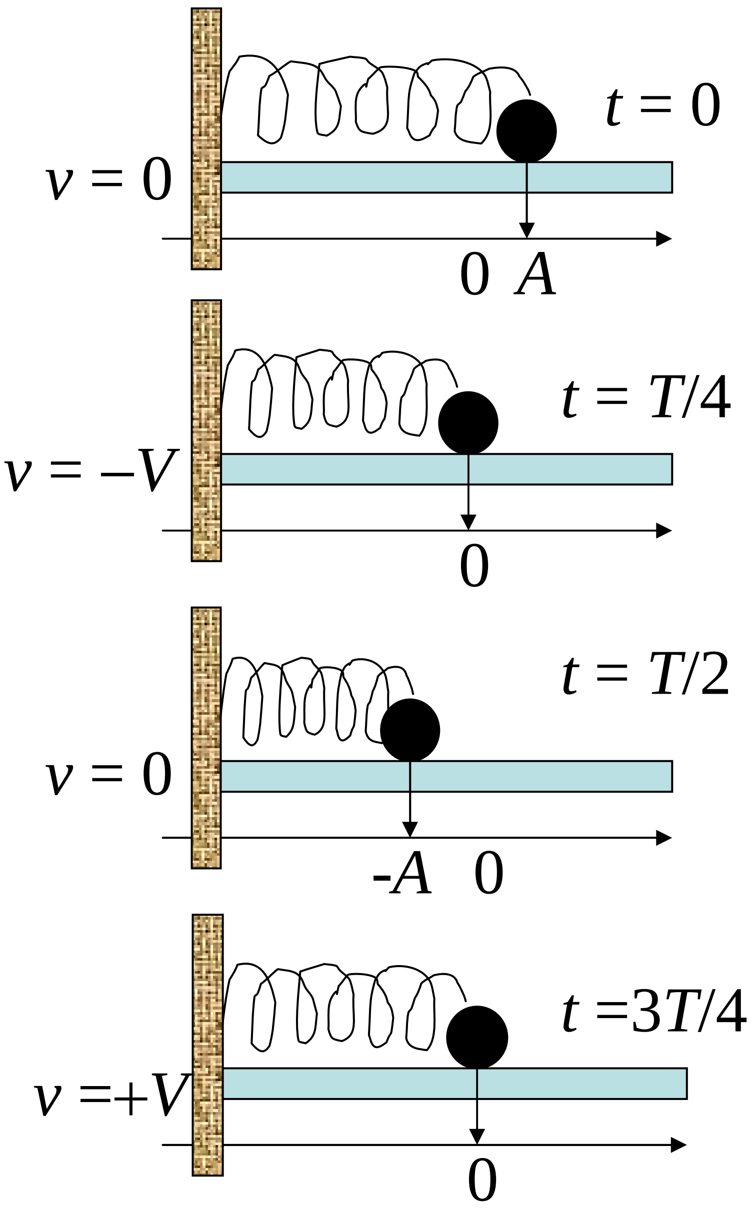
Donc cette solution nous convient!

Energie d'un mouvement harmonique

L'énergie élastique stockée dans le ressort se transforme en énergie cinétique et réciproquement.
L'*E* totale mécanique est conservée.
L'*E* cinétique est 0 aux bords et maximale en $x = 0$.

Le travail fait par $F = kx$ entre $x = 0$ (ressort au repos) et $x = A$ vaut:

$$W = \int_0^A F\ dx = \int_0^A kx\ dx = \frac{x^2}{2} k \Big|_0^A = \frac{1}{2} kA^2$$



Donc l'énergie cinétique en $x = 0$ vaut aussi $E = kA^2/2$, d'où on peut tirer la vitesse max V...

Energie d'un mouvement harmonique

En conclusion, l'énergie du système est $E = kA^2/2$

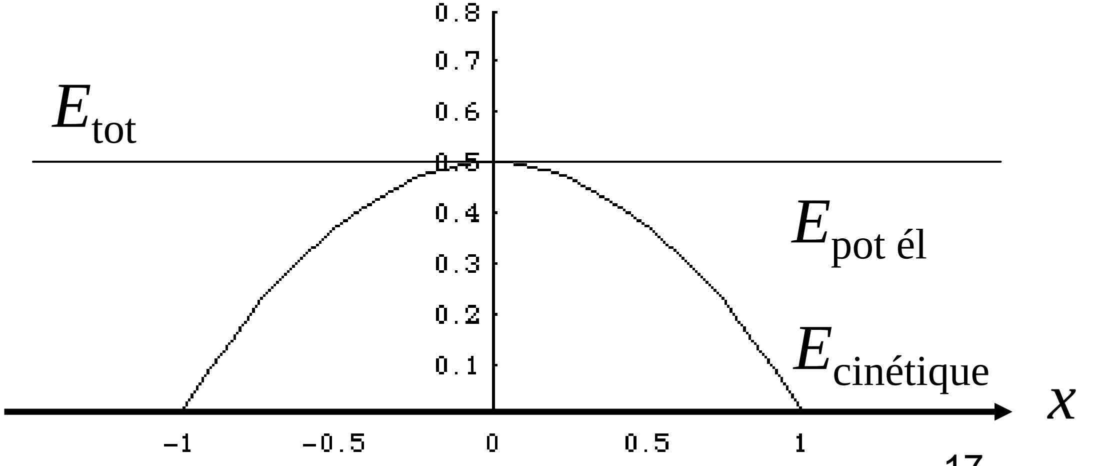
Cela est valable à tout moment, à cause de la conservation de l'énergie:

$$E = E(\text{potentielle élastique}) + E(\text{cinétique}) = kA^2/2$$

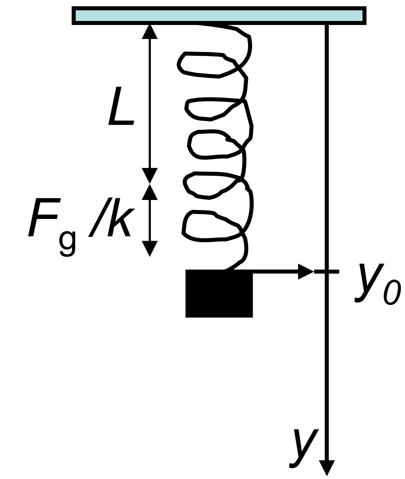
Quand le ressort se trouve en x ($x = 0$ est la position de repos) on a

$$E_{tot} = \frac{kA^2}{2} = \frac{kx^2}{2} + \frac{mv^2}{2}$$

$$\Rightarrow v = \pm\sqrt{\frac{k}{m}\left(A^2 - x^2\right)}$$



Autres exemples de mouvement harmonique simple: le poids suspendu

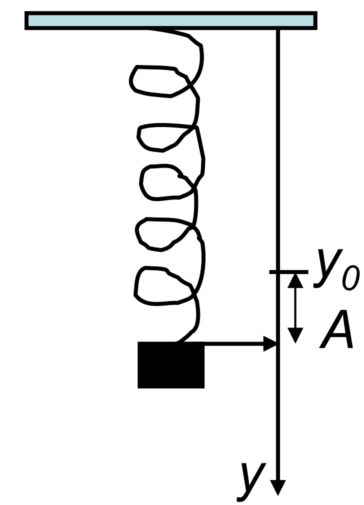


Un poids F_g suspendu à un ressort de constante k et longueur L. Sa position est repérée sur l'axe y.
Pour équilibrer le poids, la longueur y_0 à l'équilibre est telle que $F_g = (y_0 - L)k$ donc $y_0 = L + F_g/k$

On déplace le corps de A (p. ex. de 1 mm vers le bas) et on relâche. L'oscillation se fait autour de la position d'équilibre y_0:

$$y(t) = y_0 + A\cos(\omega t + \phi)$$

ou $$y(t) - y_0 \equiv \delta y(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$



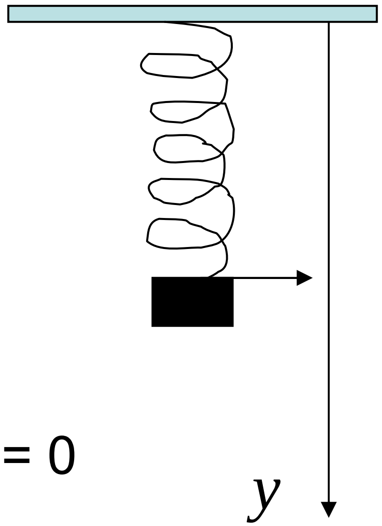
Forces en jeu:

$$F_{tot} = F_g + F_{ressort} = F_g - k(y-L) = F_g - k(y_0-L) - k(y-y_0) =$$
$$= 0 - k(y-y_0) = -k\,\delta y$$

Newton: $ma(t) = -k\,\delta y(t)$ $\qquad a(t) = -(k/m)\,\delta y(t)$

Autres exemples de mouvement harmonique simple: le poids suspendu

De: $\ddot{y}(t) = -(k/m)\,\delta y(t)$ on tire: $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$



$$\boxed{\delta y(t) = A\cos(\omega t + \phi)}$$

à $t = 0$ on a le déplacement maximal:

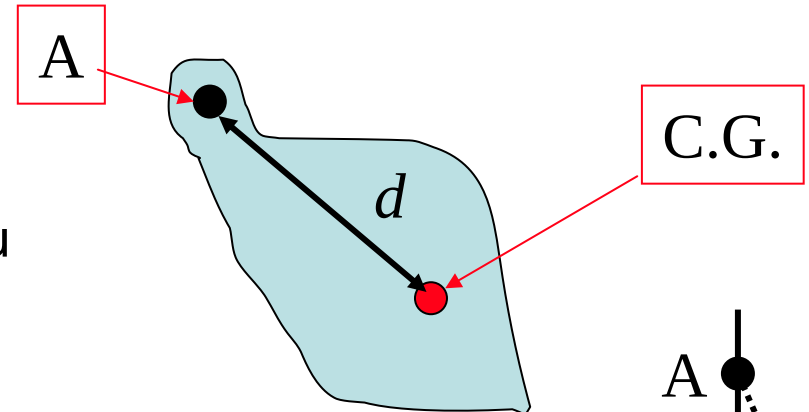
$\delta y(0) = A\cos(\phi)$

pour que cela représente le maximum, on impose $\phi = 0$

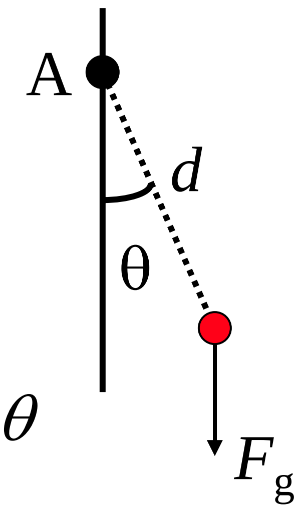
La position du poids au temps t est donc:

$$\boxed{y(t) = y_0 + A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)}$$

Autres exemples de mouvement harmonique simple: le pendule



Le pendule composé:
un objet quelconque, suspendu
et libre d'osciller autour d'un
axe A.
m est la masse de l'objet et
I est son moment d'inertie par rapport à A.



C.G. est le centre de gravité, à distance *d* de l'axe A.
Le moment des forces vaut

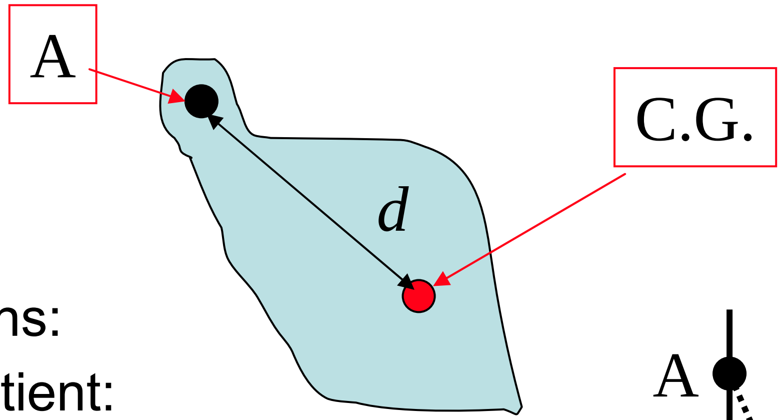
$$\tau = F_g d \sin\theta = -mgd \sin\theta$$

Avec le signe moins, on indique que, pour θ positif, le moment a tendance à provoquer un mouvement horaire, antihoraire pour $\theta < 0$.

Newton: $\tau = \boldsymbol{I}\alpha$:

$$\boxed{-mgd\sin\theta = I\alpha = I\frac{d^2\theta}{dt^2}}$$

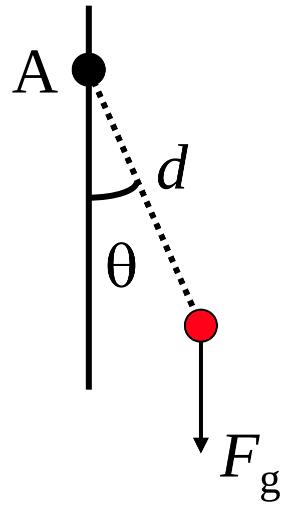
Autres exemples de mouvement harmonique simple: le pendule



$$-mgd\sin\theta = I\alpha = I\,\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

On considère des petites oscillations:

$\theta \ll 1$ rad, $\quad \sin\theta \approx \theta$ et l'on obtient:



$$-mgd\cdot\theta = I\,\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{mgd}{I}\theta \qquad \text{d'où} \qquad \omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}} \qquad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mgd}{I}}$$

Dans le cas d'un pendule simple

$I = md^2$ et on retrouve:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mgd}{I}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mgd}{md^2}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{d}}$$

États de la matière

Toute substance peut en principe exister dans quatre **états physiques** distincts:

solide, liquide, gaz ou **plasma**.

C'est la balance entre l'énergie de cohésion et l'énergie thermique qui détermine l'état du système.

► **solide** : *conserve sa forme et son volume*

► **liquide** : *coule, prend la forme du récipient dans lequel il est placé, mais conserve un volume constant (si incompressible)*

► **gaz** : *coule, se disperse prenant la forme et occupant tout le volume du récipient*

► **plasma** : *mélange d'atomes, ions et électrons*

La liaison chimique est un concept indispensable pour expliquer la cohésion de la matière et elle joue un rôle fondamental dans les propriétés des matériaux. Les forces de liaison sont essentiellement de nature électrostatique.

Fluides

- Qu'est-ce qu'on entend par « fluides »?
  - Les fluides sont des « *substances qui s'écoulent* »….
    « *substances qui prennent la forme du conteneur* »
  - Les atomes et le molécules sont libres de bouger… pas de corrélations entre les positions.
- Quels paramètres on utilise pour décrire les fluides?

► Masse volumique

(masse par unité de volume)

$$\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V}$$

► Pression

(force normale par unité de surface)

$$p = \frac{\Delta F}{\Delta A}$$

Masse volumique et Densité

La masse volumique en kilogramme/m³

$$\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V}$$

$$1\ \text{g/cm}^3 = \frac{1 \times 10^{-3}\ \text{kg}}{(1 \times 10^{-2}\ \text{m})^3} = 10^3\ \text{kg/m}^3$$

Densité

La densité représente le rapport entre la masse volumique d'une substance à celle de l'eau à 4°C. Il s'agit d'une valeur absolue, sans dimension, ni unité.
Comme ρ_{eau} = 1.00 g/cm³, la densité de n'importe quelle substance équivaut à l'expression numérique de sa masse volumique en g/cm³. Ainsi la densité du mercure est 13600/1000 =13.6, donc 1 cm³ a une masse de 13.6 g.

Matériau	ρ (kg/m³)
Air 0°/1 atm	1,29
Air 20°/1 atm	1,21
Air 0°/50 atm	6,5
CO2 0°/1 atm	1,98
Hélium 0°/1 atm	0,179
Eau (vapeur)	0,598
Eau 4°/1 atm	1000
Eau 4°/50 atm	1002
Eau de mer	1025
Mercure	13600
Alcool	790
Sang	1050
Aluminium	2700
Plomb	11300
Or	19300
Terre (noyau)	9500
Soleil (au centre)	$1,6 \times 10^5$
Noyau atomique	10^{17}

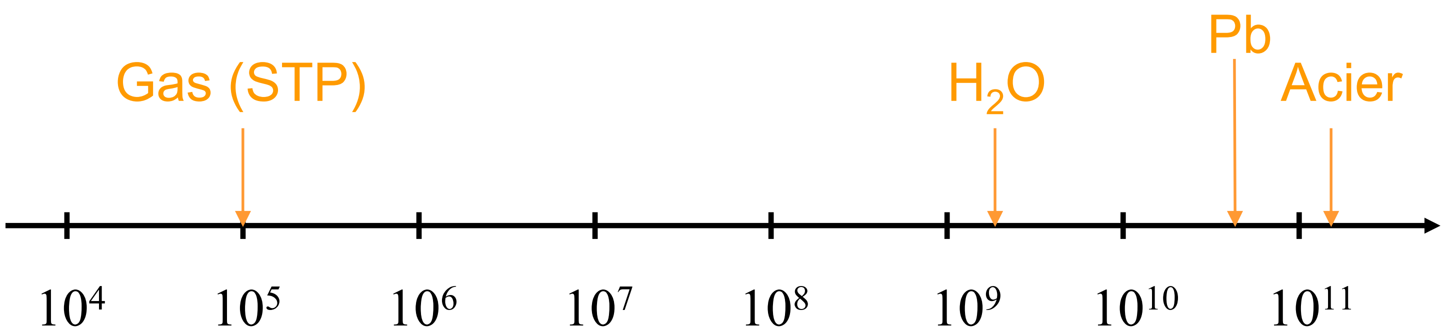
Masse volumique et pression

- La relation entre masse volumique et pression est caractérisée à travers le module

$$B = \frac{\Delta p}{(-\Delta V / V)}$$

  – **LIQUIDE: incompressible (masse volumique pratiquement constante)**

  – **GAS: compressible (masse volumique dépends de la pression)**

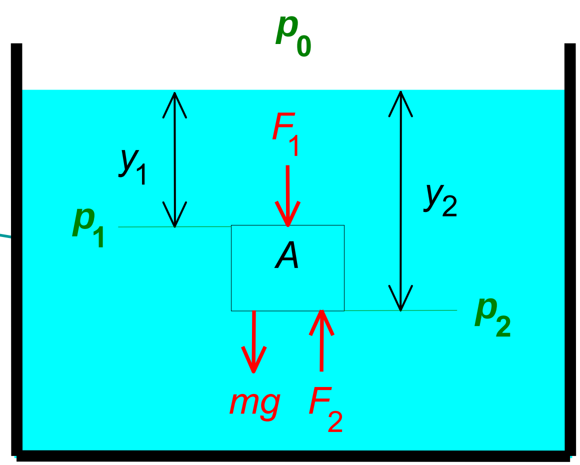


Module B (Pa=N/m²)

Pesanteur et pression hydrostatique (pour un liquide incompressible)

La pesanteur est la cause de la pression hydrostatique: la pression dans un liquide dépends de la profondeur

Soit un réservoir ouvert et contenant un cube imaginaire (avec faces supérieure et inférieure de surface *A*) immergé dans le liquide.



La somme de toutes le forces qui agissent sur le cube doit être nulle (il est en équilibre)!

- le poids du liquide dans le cube (*mg*)
- une force normale vers le haut due à la pression du fluide au-dessous du cube (F_2)
- une force normale vers le bas égale au poids de la colonne de fluide au-dessus du cube (F_1)

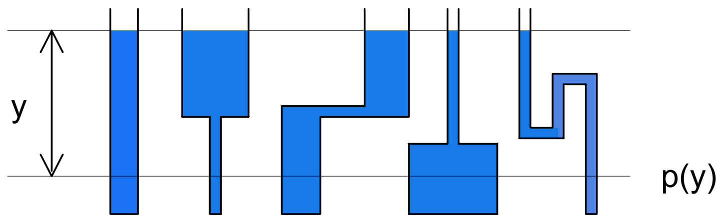
Equilibre:

$$F_2 - F_1 = mg$$

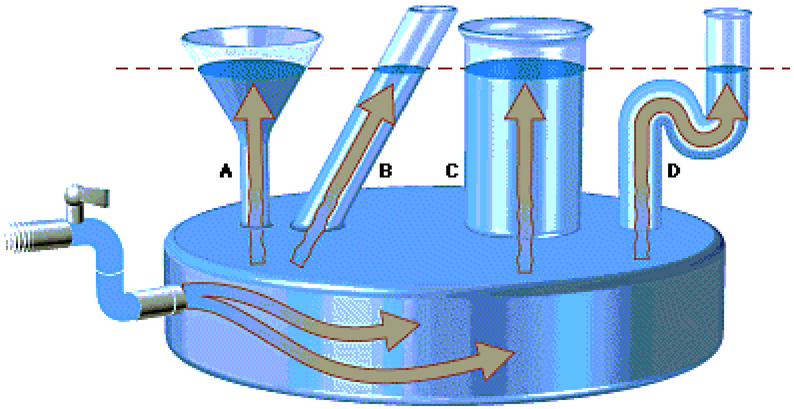
$$\begin{cases} F_2 - F_1 = p_2 A - p_1 A \\ mg = \rho (y_2 - y_1) A g \end{cases} \Rightarrow \boxed{p_2 = p_1 + \rho g (y_2 - y_1)}$$

Pression dans un récipient

Pour un fluide au repos contenu dans un récipient ouvert, la pression est la même en tous les points situés à un même niveau horizontal.



⇒ De l'eau sous pression atteint le même niveau dans plusieurs récipients de formes et de tailles différentes

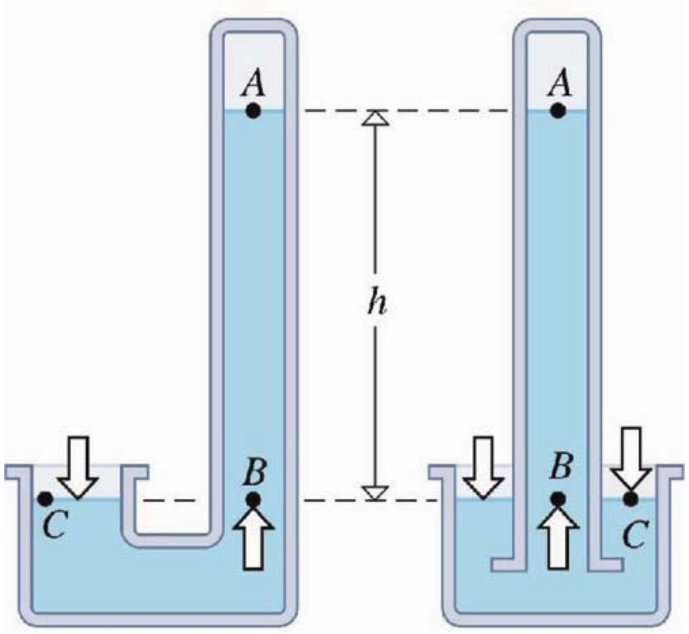


Le récipient C, plus volumineux que les trois autres, contient une masse de liquide supérieure à celles de A, B et D. Par conséquent, la *force* exercée au fond de cette colonne est supérieure aux forces homologues des trois autres récipients. Cependant, la *pression,* qui est une force par unité de surface, est identique à celles qui s'appliquent au fond des colonnes A, B et D.

Pression atmosphérique, le baromètre

La pression de l'air produit une force normale à la surface libre du mercure de la cuve et le pousse à l'intérieur du tube jusqu'à une hauteur telle que la pression exercée par le mercure du tube sur celui de la cuve est égale à celle de l'atmosphère.
"Nous vivons immergés au fond d'un océan d'air (Torricelli)"

$$p_B = p_A + \rho g h = 0 + \rho g h = p_C$$



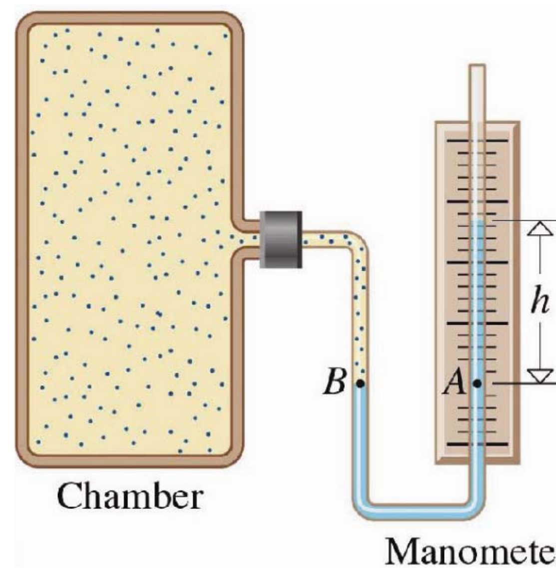
1 atmosphère est définie comme la pression équivalente à celle que produit à 0°C une colonne de 760 mm de mercure de masse volumique 13.595 × 10^3 kg/m^3.

1 atm = $\rho\, g\, h$ =
= (13,595 × 10^3kg/m^3)(9,81 m/s^2)(0,76 m) =
= 1,013 × 10^5 Pa (Pascal)

Appareil de mesure : le manomètre

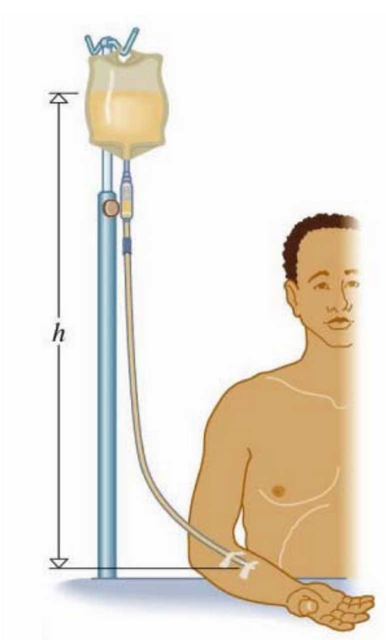
Un manomètre mesure une différence de pression entre la pression recherchée et la pression atmosphérique : pression de jauge/manométrique.

$$p_A = p_B = \rho g h + p_{atm}$$
$$\Rightarrow \quad p_B - p_{atm} = \rho g h$$



$p_B - p_{atm}$: pression de jauge

p_B : pression absolue

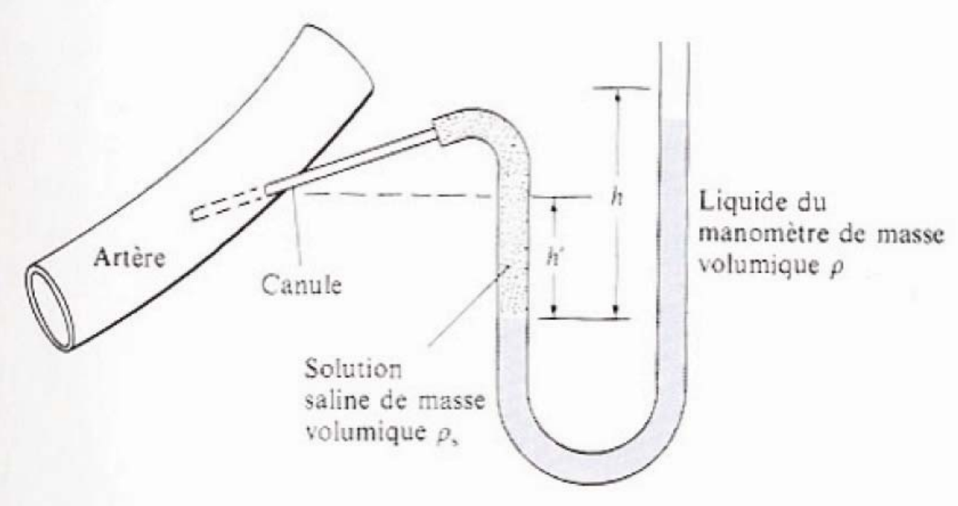


Si la pression du sang dans une veine, p_v, dépasse la pression atmosphérique de ~2 kPa = 15 mm Hg , la poche doit être placée à $h \geq p_v/\rho g \approx$ 20 cm au-dessus de l'aiguille pour que le fluide de perfusion coule dans la veine.

Circulation sanguine

Mesure de la pression sanguine par cathétérisation:

$$p_{\text{sang}} = p_{\text{atm}} + \rho g h - \rho_s g h'$$

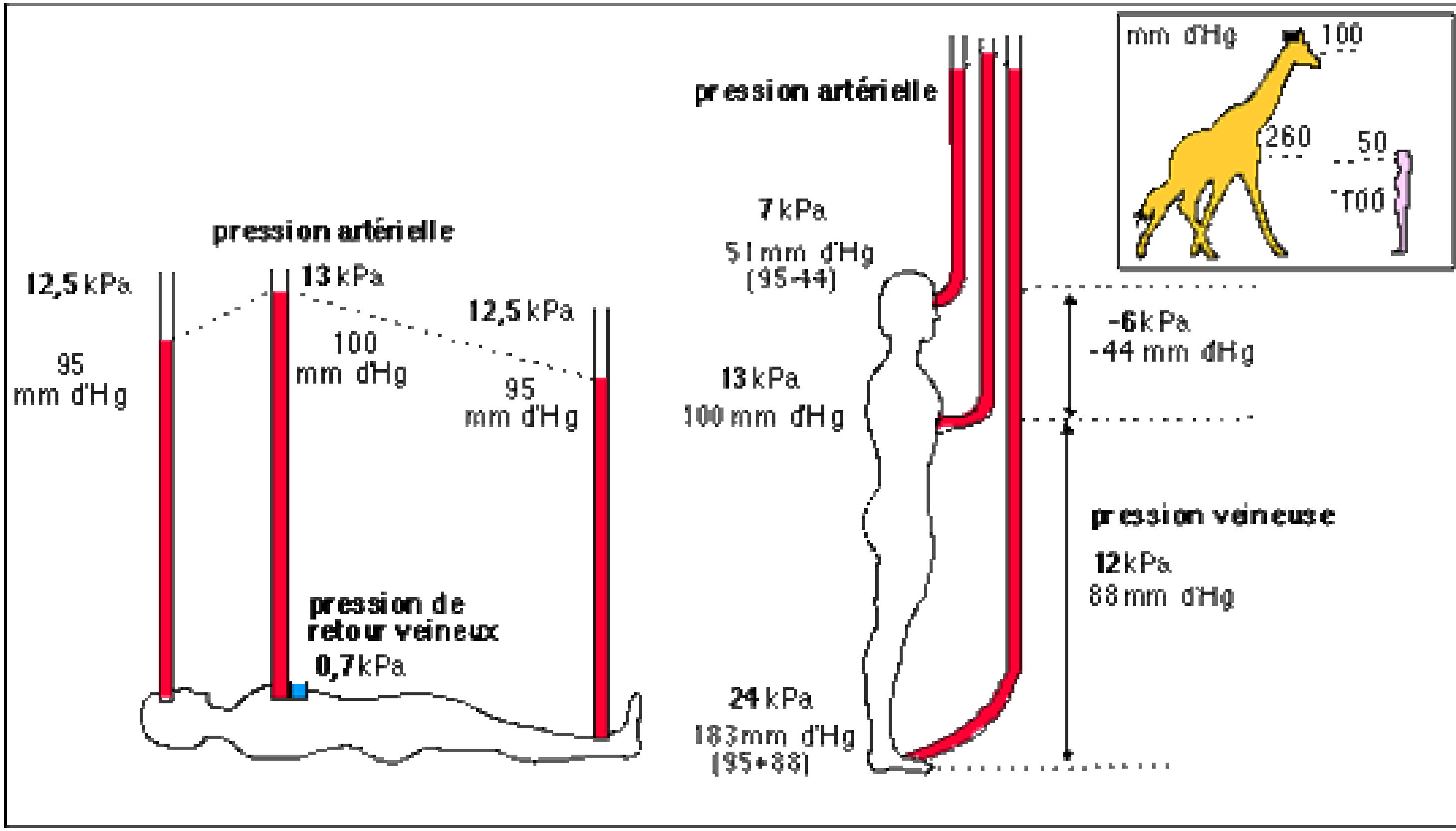


Volume sanguin, **pression** sanguine et **vitesse** linéaire du **sang** dans les différentes parties du **système vasculaire de l'homme** (1 mm d'Hg = 0,13 kPa) in Schmidt-Nielsen, fig 3.11

	volume (mL)	*pression (mm d'Hg)*	*vitesse (cm/s)*
aorte	100	100	40
artères	300	100-40	40-10
artérioles	50	40-30	10-0,1
capillaires	250	30-12	<0,1
veinules	300	12-10	<0,3
veines	2200	10-5	0,3-5
veine cave	300	2	5-20

Tension artérielle: mercure
Tension veineuse, plus basse: solution de sel

Rôle de la gravitation dans la circulation sanguine

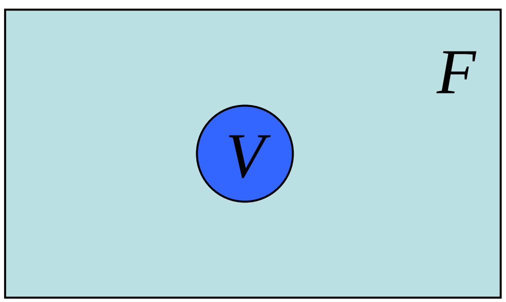


Pour une différence de hauteur entre cœur et pieds h_c d'environ 1.3 m, on a
$p_p - p_c = \rho g h_c = (1.0595 \times 10^3\ \mathrm{kg/m^3})\ (9.81\ \mathrm{m/s^2})(1.3\ \mathrm{m}) = 13.5\ \mathrm{kPa}$.

Mais le sang circule, il aurait fallu utiliser l'équation de Bernoulli, mais comme les vitesses de circulation sanguine sont petites et égales, on retombe sur la même équation.

Le principe d'Archimède

Un objet immergé dans un fluide subit une poussée vers le haut égale au poids du fluide déplacé (Archimède, env. 250 AC).



Elément de fluide F de volume V et de densité ρ_F en équilibre:
son poids $w_F = -m_F\, g = -\rho_F V g$
est équilibré par une poussée égale et contraire: $\boldsymbol{B = \rho_F V g}$.

Donc, si l'on remplace F par un corps C de même volume, le fluide ne peut pas s'apercevoir du changement et continuera à pousser avec la force $\boldsymbol{B = \rho_F V g}$.

Dérivation du principe d'Archimède

La poussée d'Archimède est causée par la pesanteur agissant sur le fluide. Elle a son origine dans la différence de pression entre la partie supérieure et la partie inférieure de l'objet immergé. Considérons un cube plein, dont les faces ont une surface A, immergé dans un liquide de masse volumique ρ_0.

Pression manométrique inférieure : $p_2 = \rho_0\, g\, y_2$
Pression manométrique supérieure : $p_1 = \rho_0\, g\, y_1$
La différence de pression :

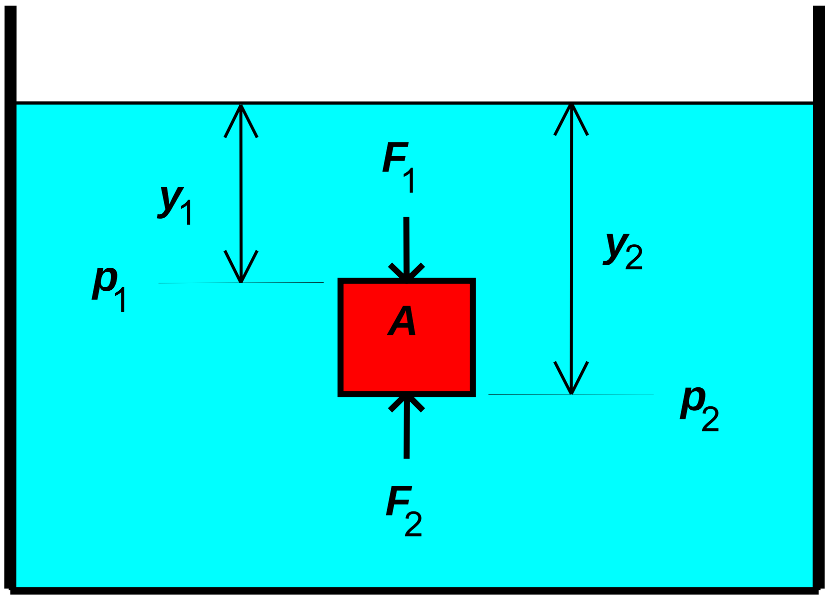
$$\Delta p = \rho_0\, g\, (y_2 - y_1)$$

est à l'origine de la poussée d'Archimède:

$$F_A = A\, \Delta p = A\, \rho_0\, g\, (y_2 - y_1)$$

Or, $A(y_2 - y_1) = V$ est le volume du corps, égal aussi au volume du fluide déplacé, si le corps est totalement immergé. Comme la masse du fluide déplacé est $m_0 = \rho_0 V$, on peut écrire :

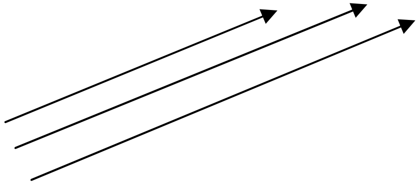
$$\mathbf{F_A = \rho_0\, g\, V = m_0\, g}$$



La poussée d'Archimède est égale au poids du liquide déplacé

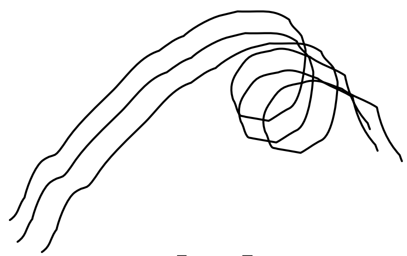
Ecoulement d'un fluide

Les expériences menées par O. Reynolds en 1883 ont montré qu'il y avait 2 régimes distincts d'écoulement: **laminaire et turbulent**.



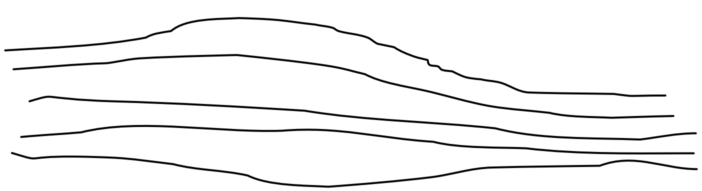
laminaire

⇒ si un fluide qui se déplace de façon que sa vitesse en tout point reste constante en module et en direction. On a un écoulement régulier et lent.
La vitesse peut être différente en différents points.



turbulent

L'écoulement turbulent correspond à un mouvement irrégulier chaotique et variable.



Les lignes de courant sont plus serrées là où la vitesse est plus grande.

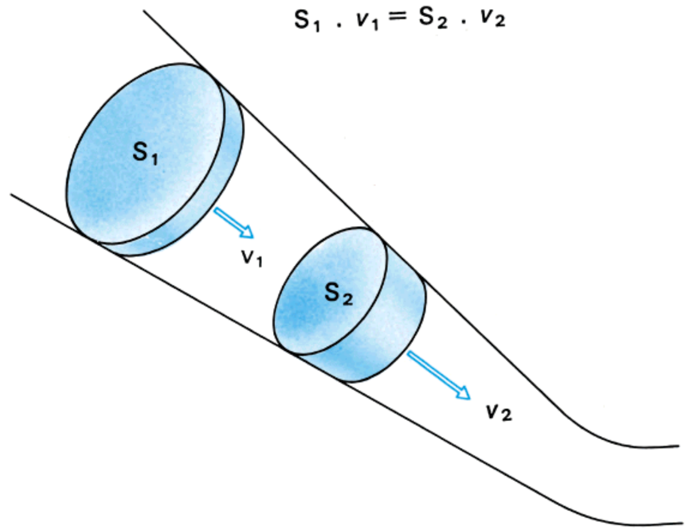
Ce fluide est-il compressible ?

Écoulement laminaire d'un fluide incompressible

Débit d'un fluide dans une canalisation: $Q = \Delta V / \Delta t$ $\quad m^3\ s^{-1}$

S' il n'y a pas de source ou de perte, le débit est constant le long de la canalisation: $\mathbf{Q = cte}$

Le fluide entre par l'élément de tube 1 de section S_1 et sort par l'élément de tube 2 de section S_2. Pendant un intervalle de temps Δt, les molécules entrant dans le tube traversent une distance $v_1 \Delta t$ et les particules sortant une distance $v_2 \Delta t$ (v_1 et v_2 sont les vitesses moyennes du fluide en 1 et en 2). Puisque les volumes entrant et sortant sont les mêmes :



$$\boxed{\Delta V = S_1 v_1 \Delta t = S_2 v_2 \Delta t \quad \Rightarrow \quad S_1 v_1 = S_2 v_2 = Q}$$

Ceci est **l'équation de continuité.**

Si la section du tube augmente, la vitesse d'écoulement diminue et vice-versa.

Exemple : Circulation du sang

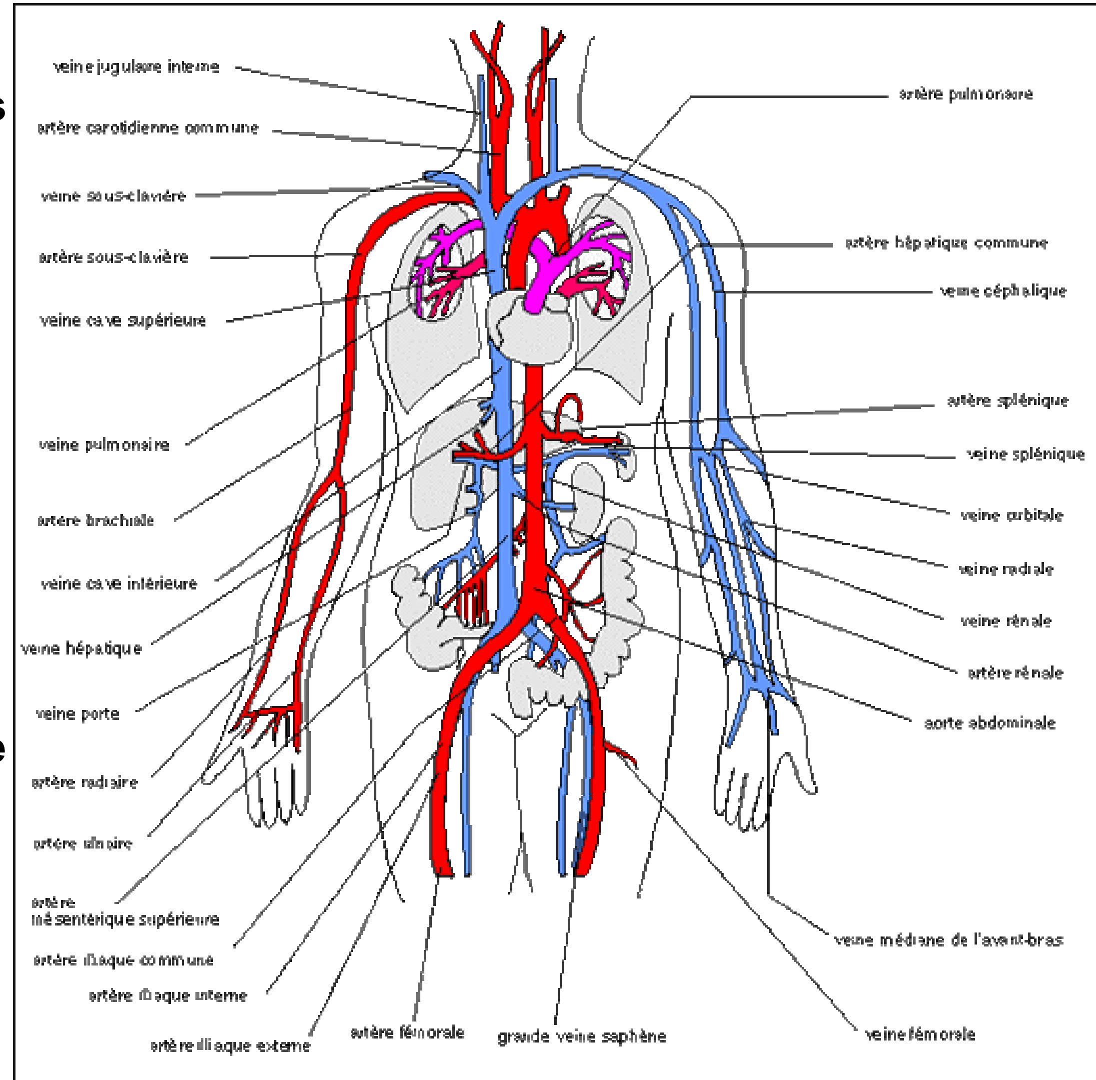
Le sang est pompé vers l’extérieur du coeur dans l’aorte, un tube aux parois épaisses (2mm) et de diamètre intérieur 18mm, à une vitesse moyenne de 0,33 m/s, dans le cas d’un adulte au repos.

(a) Calculer le débit. L’aorte se divise en 32 grandes artères, approximativement de même taille, environ 4 mm de diamètre intérieur.

(b) Quelle est la vitesse du sang dans ces artères?

Les plus petites branches du système sont les capillaires, de diamètre intérieur proche de 8×10^{-6} m.

(c) Sachant que la section totale de l’ensemble des capillaires est $2{,}5 \times 10^{5}$mm^2, quelle est la vitesse du sang dans un capillaire ?



SOLUTION

(a) Pour l'aorte (indice A)

$$Q_{\mathrm{A}} = S_{\mathrm{A}} v_{\mathrm{A}} = \pi (D_{\mathrm{A}} / 2)^2 v_{\mathrm{A}} = 8.4 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m^3/s}$$

(b) L'aorte se divise en 32 artères. Comme le débit à travers l'aorte est le même qu'à travers l'ensemble des 32 artères (indice a) $Q_A = Q_a = S_a\, v_a$:

$$v_{\mathrm{a}} = \frac{Q_{\mathrm{A}}}{S_{\mathrm{a}}} = \frac{8.4 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m^3/s}}{32 \pi (D_{\mathrm{a}} / 2)^2} = 0.21\ \mathrm{m/s}$$

(c) De même, dans les capillaires (indice c) $Q_A = Q_c = S_c\, v_c$:

$$v_{\mathrm{c}} = \frac{Q_{\mathrm{A}}}{S_{\mathrm{c}}} = \frac{8.4 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m^3/s}}{2.5 \cdot 10^{-1}\ \mathrm{m^2}} = 3.4 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m/s}$$

Ecoulement laminaire d'un fluide incompressible
Le théorème de Bernoulli

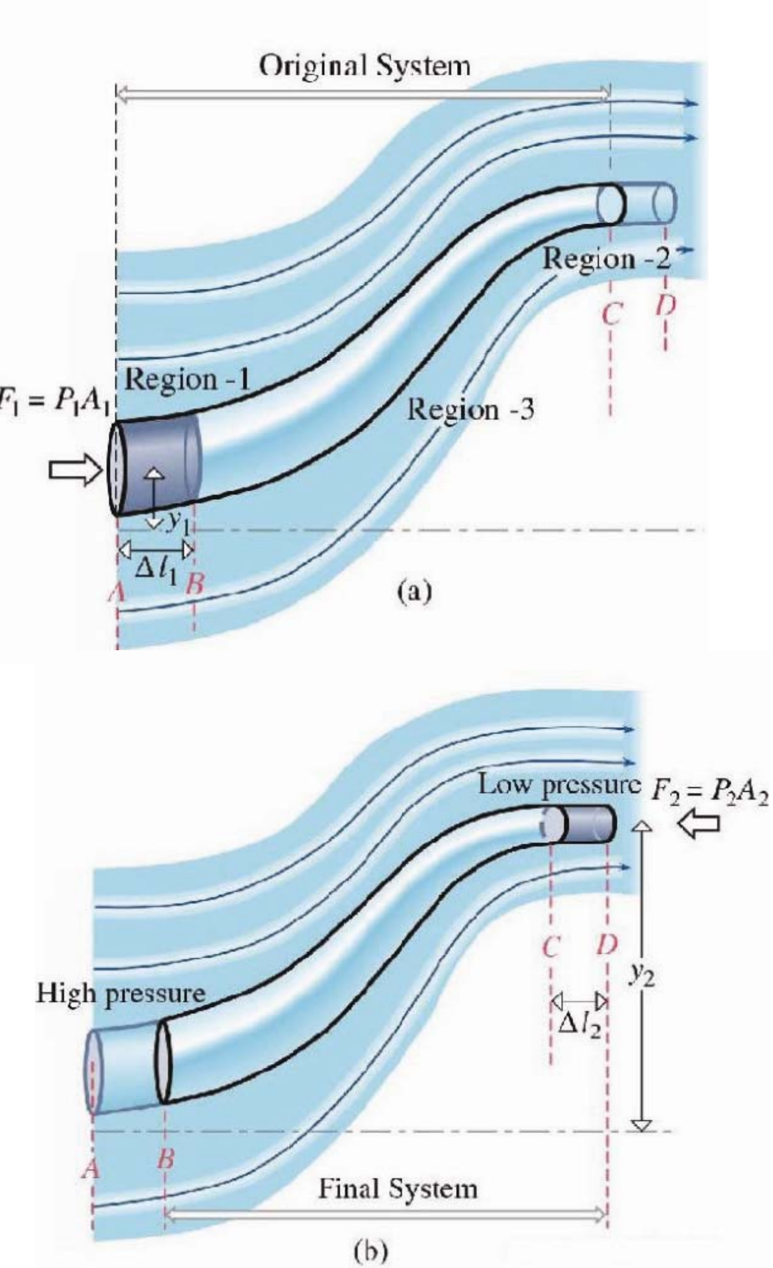
Il s'agit d'appliquer le principe de conservation de l'énergie mécanique. Donc pas de conversion en énergie interne (pas de variation de volume ni frottement):

- ► le fluide est incompressible
- ► écoulement laminaire
- ► régime stationnaire
  ($v(x,y,z)$ ne dépend pas du temps)

On recherche une formule du type:

$$W = \Delta E_{\text{cinétique}} + \Delta E_{\text{potentielle}}$$

Le théorème de Bernoulli



Travail fourni au fluide ΔW :

$$\Delta W = F_1\Delta l_1 - F_2\Delta l_2 = p_1A_1\Delta l_1 - p_2A_2\Delta l_2$$

Comme $\Delta l_1 = v_1\Delta t$ et $\Delta l_2 = v_2\Delta t$:

$$\Delta W = p_1A_1v_1\Delta t - p_2A_2v_2\Delta t$$

Avec l'équation de continuité $A_1v_1 = A_2v_2 = Av$:

$$\Delta W = Av\Delta t(p_1 - p_2)$$

Si on utilise la masse de l'élément de volume déplacé $\Delta m = \rho\Delta V = \rho(Av\,\Delta t)$:

$$\Delta W = \frac{\Delta m}{\rho}(p_1 - p_2)$$

Le théorème de Bernoulli

Variation d'énergie cinétique: $$\Delta E_{\mathrm{cin}} = \frac{1}{2}\Delta m({v_2}^2 - {v_1}^2)$$

Variation d'énergie potentielle gravitationnelle: $$\Delta E_{\mathrm{p}} = \Delta m g(y_2 - y_1)$$

Conservation de l'énergie mécanique:

$$\frac{\Delta m}{\rho}(p_1 - p_2) = \frac{1}{2}\Delta m({v_2}^2 - {v_1}^2) + \Delta m g(y_2 - y_1)$$

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho({v_2}^2 - {v_1}^2) + \rho g(y_2 - y_1)$$

$$\Rightarrow \quad p_1 + \frac{1}{2}\rho {v_1}^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho {v_2}^2 + \rho g y_2$$

Le théorème de Bernoulli

Le long d’une ligne de courant, un fluide parfait en écoulement régulier et laminaire obéit au ***théorème de Bernoulli*** :

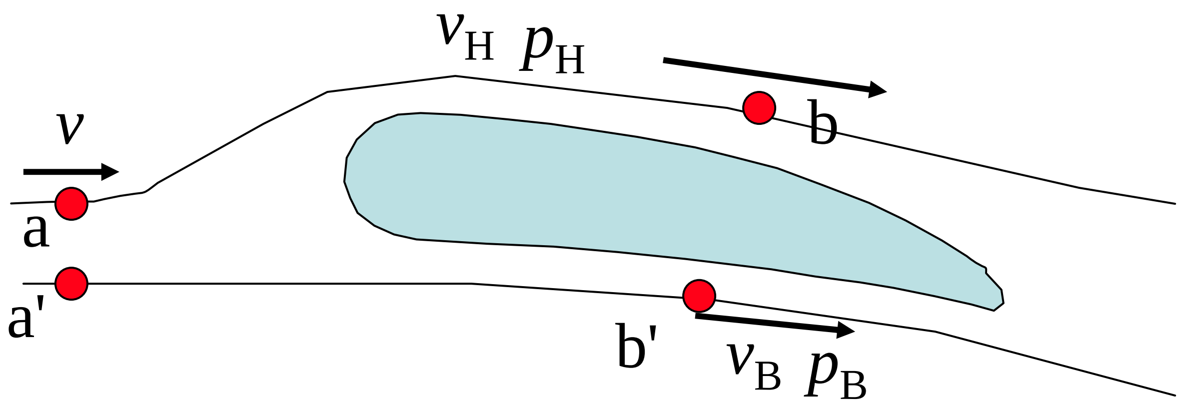
$$\boxed{p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g y = \text{constante}}$$

Pression
(force, travail)

E cinétique
par unité de volume

U gravitationnelle
par unité de volume

Le théorème de Bernoulli: l'aile d'avion



Suivant les deux tubes de fluide, en bas et en haut, on voit que la vitesse doit être plus grande en haut, car le profil y rend le parcours de l'air plus long. Les points a et a' sont équivalents en vitesse et pression:

$$p_a + \frac{1}{2}\rho v_a^2 = p_{\text{atm}} + \frac{1}{2}\rho v^2$$

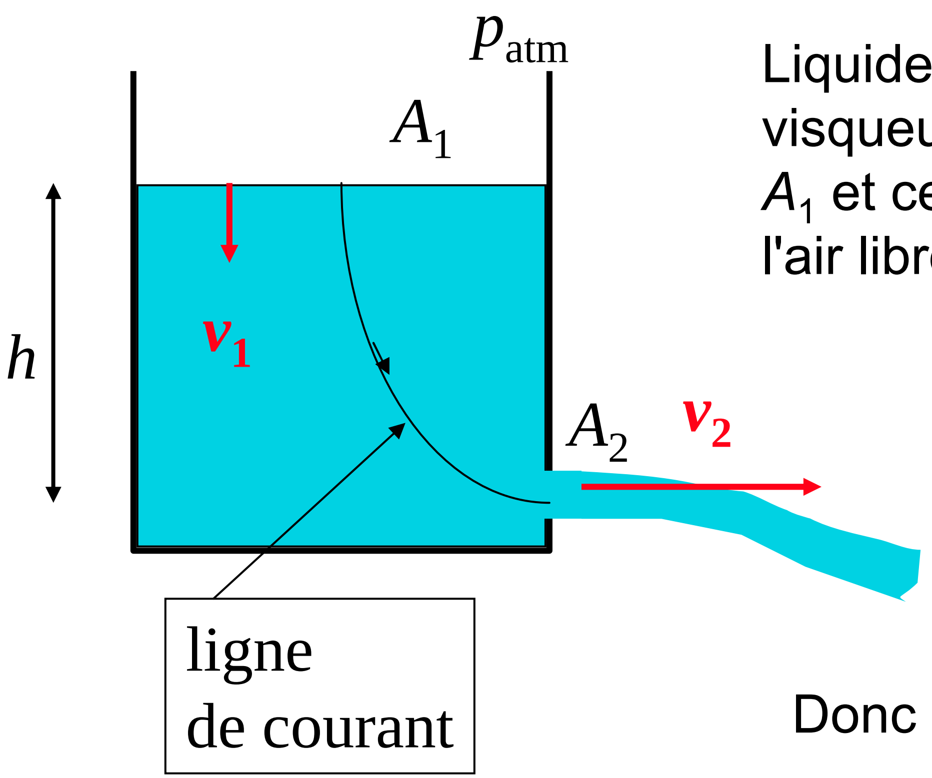
$$p_{\text{atm}} + \frac{1}{2}\rho v^2 = p_H + \frac{1}{2}\rho v_H^2 = p_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2$$

on néglige la différence d'hauteur

$$p_B - p_H = \frac{1}{2}\rho\left(v_H^2 - v_B^2\right)$$

poussée verticale ≈ (Surface aile)($p_B - p_H$)

Loi de Torricelli



Liquide incompressible et non visqueux. La surface du réservoir A_1 et celle de l'orifice $A_2 << A_1$ sont à l'air libre: pression = p_{atm}

On veut déterminer v_2, la vitesse de sortie.

Continuité: $A_1 v_1 = A_2 v_2$

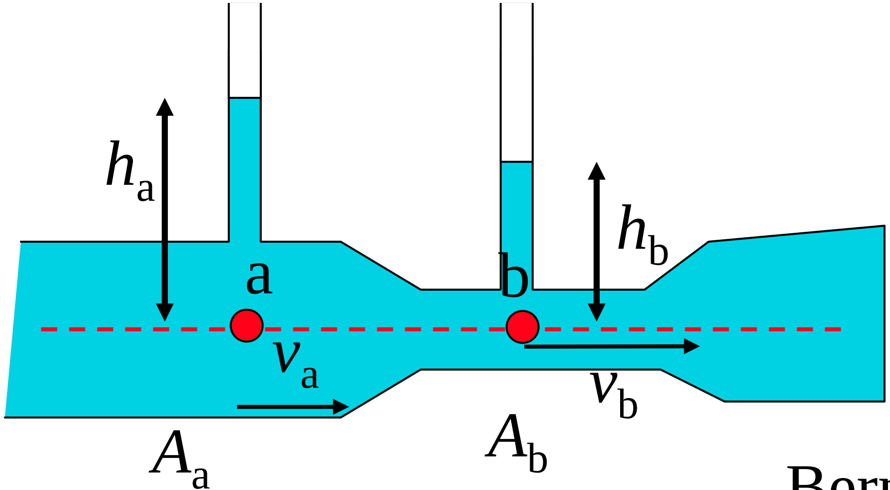
Donc $v_1 = (A_2/A_1)\, v_2 << v_2$ $\quad v_1 \approx 0$

Bernoulli: $p_{atm} + 0 + \rho g h = p_{atm} + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + 0$

$$\boxed{v_2 = \sqrt{2gh}}$$

indépendant de la densité.

Le tube de Venturi



Un rétrécissement du tube augmente localement la vitesse du fluide. Les points a et b sont à la même hauteur:

Bernoulli: $$p_a + \frac{1}{2}\rho v_a^2 = p_b + \frac{1}{2}\rho v_b^2$$

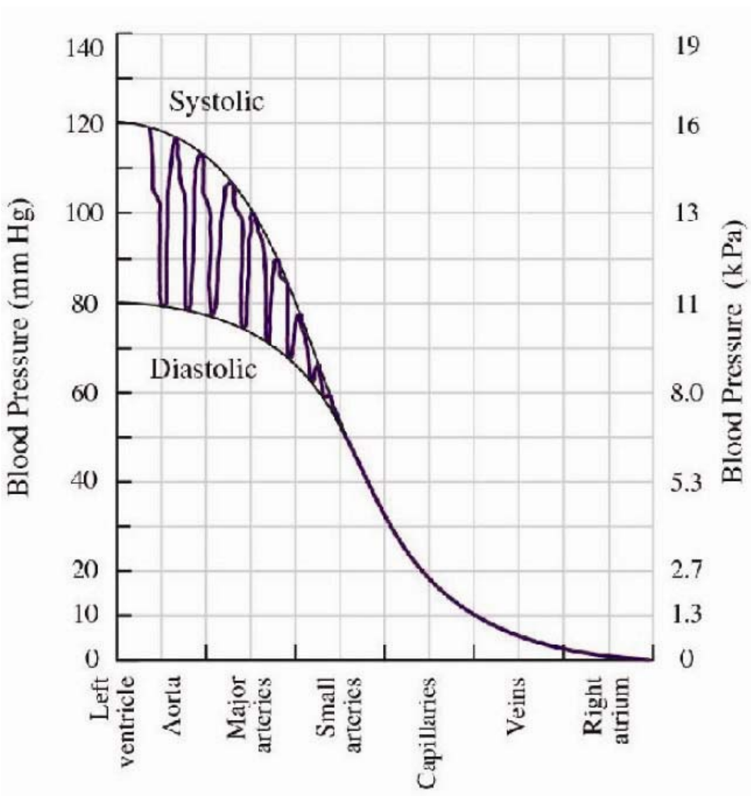
Continuité: $A_a v_a = A_b v_b$

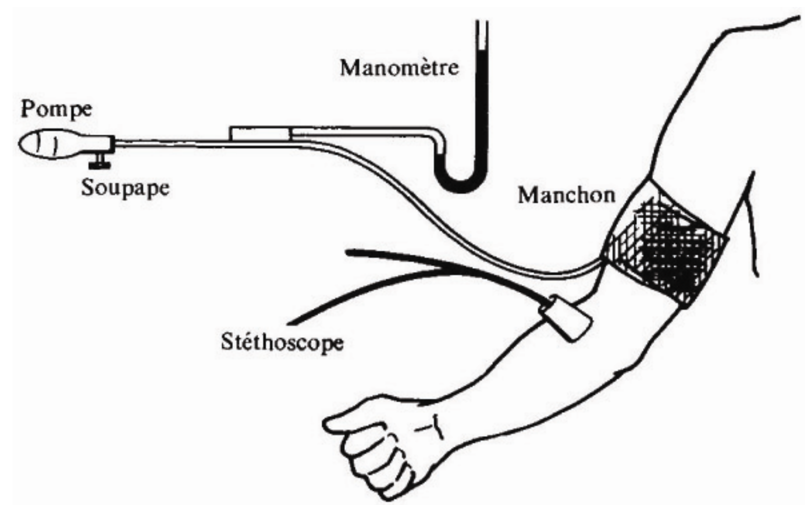
On tire la vitesse $$v_a = \sqrt{2(p_a - p_b) \Big/ \rho\left(\frac{A_a^2}{A_b^2} - 1\right)}$$

et on peut calculer le débit $Q = v_a A_a$

Mesure de la tension artérielle

Pendant un cycle cardiaque complet, la pression dans le coeur et le système circulatoire passe par un maximum (phase de pompage du coeur) et par un minimum (sang renvoyé par les veines). On mesure ces pressions extrêmes. Son principe est basé sur le fait que l'écoulement sanguin dans les artères n'est pas toujours laminaire. L'écoulement devient turbulent quand les artères sont comprimées. Il est alors bruyant et peut être perçu au moyen d'un stéthoscope.





Rapport systolique/diastolique : 120/80 en mm Hg